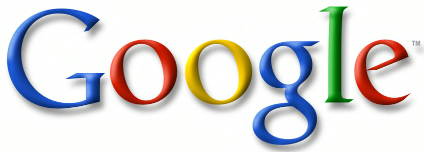

Google

Arthur Egon Kiefer
stud. math.
in Carlsruhe.



Aufgaben

zur

Differential- und Integralrechnung

nebst den Resultaten und den zur Lösung nöthigen theoretischen Erläuterungen.

Von

Dr. H. Dölp,

Professor am Polytechnikum zu Darmstadt.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Giessen, 1874.

J. Ricker'sche Buchhandlung.

Buchdruckerei von H. Brill in Darmstadt.

Vorwort zur ersten Auflage.

Der Wunsch der Herren Professoren Dr. Clebsch und Dr. Gordan zu Giessen, ihren Zuhörern für die Uebungen in der Differential- und Integralrechnung eine Aufgabensammlung empfehlen zu können, die sich ihren Vorträgen mehr als die gebräuchlichen accommodire, hat mich zur Bearbeitung dieses Schriftchens veranlasst. Dabei schien es geboten, neben den Uebungsbeispielen auch diejenigen Theile der Theorie aufzunehmen, bei welchen die Vorträge des Herrn Professors Clebsch von der üblichen Darstellungsweise wesentlich abweichen; unter der Hand haben sich aber gegen die anfängliche Absicht diese einzelnen Theile zu einem vollständigen Grundriss der beiden Disciplinen erweitert. Kunstgriffe, wie sie in der Integralrechnung nicht selten zur Anwendung kommen, mussten selbstverständlich hier unberücksichtigt bleiben, und daher sind auch diejenigen Aufgaben nach allgemein gültigen Sätzen behandelt, welche vielleicht durch eine geschickte Transformation etwas kürzer gelöst werden konnten. Die Beispiele sind zum Theil neu gebildet, zum Theil der mir zu Gebot stehenden Literatur entnommen. Bei der Auswahl liess ich mich von der Ansicht leiten, dass einfache Beispiele viel mehr zu empfehlen seien, als solche, die namentlich ihrer algebraischen Schwierigkeiten wegen die Ausdauer des Uebenden über Gebühr in Anspruch nehmen.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Es war dem Verfasser des Buches leider nicht vergönnt, die vorliegende zweite Auflage zum Abschluss zu bringen. Mit der Bearbeitung der letzten Bogen für dieselbe beschäftigt, wurde er von einer tödtlichen Krankheit befallen, als eben der Hauptheil der umfangreichen Arbeit, die er sich durch Umgestaltung und Neubearbeitung des Werkes auferlegt hatte, beendigt war. Die Verlagshandlung hat dafür Sorge getragen, dass der Abschluss der neuen Auflage, deren Druck übrigens der Verfasser bis auf die letzten drei Bogen selbst geleitet und überwacht hatte — in einer den Intentionen des Verfassers entsprechenden Weise erfolgt ist.

Die Lehrthätigkeit des Verfassers an der polytechnischen Schule zu Darmstadt hatte ihn in den Stand gesetzt, seine Sammlung in Bezug auf Auswahl und Anordnung des Stoffes wiederholt practisch zu prüfen; man wird die Ergebnisse dieser mehrjährigen Beobachtung und Prüfung in der neuen Auflage an vielen Stellen verwerthet finden, insbesondere dürfte die grössere Ausführlichkeit des einleitenden und erläuternden Textes der beifälligen Aufnahme des betheiligten Leserkreises gewiss sein. Der sichere pädagogische Tact, der den verstorbenen Verfasser in seiner so ausserordentlich erfolgreichen Lehrthätigkeit stets geleitet hat, ist eine unzweifelhafte Bürgschaft dafür, dass dem Werke in seiner neuen Gestalt der Erfolg der ersten Auflage nicht fehlen wird.

Giessen, im August 1874.

Die Verlagshandlung:

J. Ricker.

INHALT.

Differentialrechnung.

Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

Integralrechnung.

Unbestimmte Integrale.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.



Differentialrechnung.

Funktionen einer unabhängigen Variabelen.

§. 1. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachen Funktionen.

$y = a x^n$	$\frac{dy}{dx} = n a x^{n-1}$
$y = \frac{a}{x^n} = a x^{-n}$	„ $= -\frac{n a}{x^{n+1}} = -n a x^{-n-1}$
$y = a \sqrt[n]{x} = a x^{\frac{1}{n}}$	„ $= \frac{a}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} . a . x^{\frac{1}{n}-1}$
$y = a \sqrt[n]{x^p} = a x^{\frac{p}{n}}$	„ $= \frac{p}{n} . a \sqrt[n]{x^{p-n}} = \frac{p}{n} . a x^{\frac{p}{n}-1}$
$y = \sqrt{x}$	„ $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = e^x$	„ $= e^x$
$y = a^x$	„ $= a^x \, l . a$
$y = l . x$	„ $= \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	„ $= \cos x$
$y = \cos x$	„ $= -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	„ $= \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{cotg} x$	„ $= -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \operatorname{arc} \sin x$	„ $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$y = \text{arc} \cos x \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arc tg}\, x \qquad \text{„} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc cotg}\, x \qquad \text{„} = -\frac{1}{1+x^2}$$

§. 2. Entwickelung der Differentialquotienten algebraischer Funktionen.

Eine einzige Gleichung zwischen den beiden Unbekannten x und y und einer beliebigen Anzahl von willkürlich gewählten constanten Grössen a, b, c u. s. w., wie etwa: $y = (a + bx + cx^2)^n$; $y = \sqrt{a + bx}$; $y = a \sin x + b \cos x$; $y = \text{tg}\, x$; $y = e^{ax}$; $y = a^x$; $y = l.(a + bx)$ u. s. w. kann durch eine beliebige Anzahl von Werthpaaren x, y befriedigt werden, indem aus der Gleichung für jeden an die Stelle von x substituirten Werth ein oder einige zugehörige Werthe von y hervorgehen. Wir sagen daher, in solchen Gleichungen sei y eine Funktion von x und wollen damit ausdrücken, dass in irgend einer Funktion der Werth y davon abhängt, welchen Werth man der Grösse x beilegt. Die beiden von einander abhängigen Grössen x und y werden die Veränderlichen oder Variabelen der Funktion genannt, und zwar heisst in den oben angeführten Funktionsformen x die unabhängige und y die abhängige Variabele. Die übrigen Grössen, wie a, b, c u. s. w., nennt man die Constanten der Funktion. Symbole wie die folgenden:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x) \text{ u. s. w.}$$

dienen zur allgemeinen Bezeichnung solcher Funktionen; die mit x verbundenen Constanten sind hier nicht besonders hervorgehoben. Es ist eine Eigenthümlichkeit vieler Funktionen, dass jedem beliebigen Werth von x auch nur ein einziger Werth von y entspricht, wie in $y = x^2$, $y = \sin x$; doch gibt es auch solche, die zu jedem Werth von x mehr als einen Werth von y liefern, wie $y = \sqrt{x}$, $y = \arcsin x$. Hiernach werden ein- und mehrdeutige Funktionen unterschieden.

Substituirt man in eine beliebige Funktion $y = f(x)$ an Stelle der unabhängigen Variabelen x die bestimmten Werthe x und x_1, so ergeben sich die entsprechenden Funktionswerthe $y = f(x)$ und $y_1 = f(x_1)$, und man kann aus beiden Werthpaaren den folgenden Differenzenquotienten zusammensetzen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (1)$$

und da wir die Funktion f als gegeben voraussetzen, so kann in jedem einzelnen Falle dieser Quotient auch ausgerechnet werden.

1. Beispiel: $y = ax^2$, $y_1 = ax_1^2$,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a(x_1^2 - x^2)}{x_1 - x} = a(x_1 + x).$$

2. Beispiel: $y = \sqrt{x}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x}}{x_1 - x} = \frac{1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x}}.$$

Halten wir nun in (1) das Werthpaar x, y unverändert fest, ändern dagegen den Werth x_1 in der Art, dass er sich dem Werth von x mehr und mehr nähert, so wird auch y_1 andere und andere Werthe annehmen und in dem Augenblick gleich y sein, wo x_1 gleich x geworden ist. In diesem besonderen Falle nimmt der unter (1) angeführte Differenzenquotient die Form $\frac{0}{0}$ an und heisst Differentialquotient. Dass derselbe trotz der eigenthümlichen Form doch einen ganz bestimmten und von der Art der Funktion abhängigen Werth besitzt, zeigen uns schon die angeführten Beispiele, indem für $x_1 = x$ der eine Differenzenquotient in $2ax$, der andere in $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ übergeht. Dieses stetige Kleinerwerden der beiden Differenzen $(x_1 - x)$ und $(y_1 - y)$ in dem Quotienten (1), fortgesetzt bis zu ihrem gänzlichen gleichzeitigen Verschwinden, wird als Uebergang zu den Grenzwerthen oder Grenzen bezeichnet und durch das vorgesetzte Zeichen lim (limes, Grenze) angezeigt, der hierdurch aus dem Differenzenquotienten hervorgehende Differentialquotient

wird durch das Symbol $\frac{dy}{dx}$ dargestellt und durch folgende Gleichung definirt:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

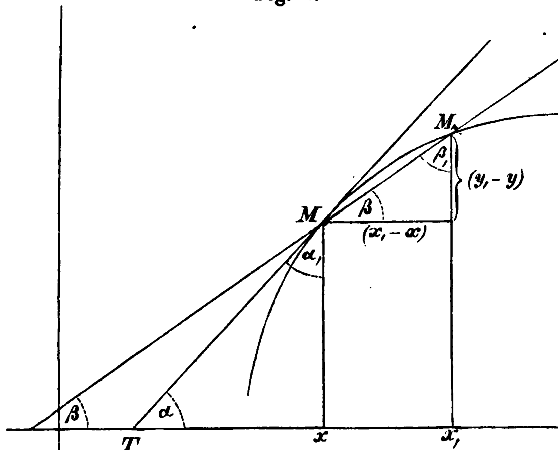
Die anfangs etwas befremdende Thatsache, dass die beiden Differenzen (1) auch dann noch ein bestimmtes Werthverhältniss besitzen, wenn sie beide in Null übergegangen sind, wird durch eine etwas veränderte Auffassung des erwähnten Ueberganges zur Grenze vollständig aufgeklärt. Führt man nämlich die stetige Verkleinerung der Differenzen $(x_1 - x)$ nicht vollständig zu Ende, sondern sistirt das Verfahren in dem Augenblick, wo $(x_1 - x)$ bereits so klein geworden ist, dass es nicht mehr kleiner werden könnte, ohne vollständig in Null überzugehen, so nennt man diese verschwindend kleine Differenz ein Differential von x und bezeichnet es durch dx. Da nun die andere Differenz $(y_1 - y)$ mit der vorhergehenden gleichzeitig verschwindet, so wird auch sie in dem Augenblick im Begriff stehen zu verschwinden, wo $(x_1 - x)$ bereits zu dx geworden ist. Dieser verschwindend kleine und dem dx entsprechende Werth von $(y_1 - y)$ wird das Differential von y genannt und durch dy bezeichnet. Obgleich hiernach die beiden angeführten Differentiale als verschwindend kleine Grössen angesehen werden müssen, so sind sie doch keineswegs einander gleich, weil sie der Bedingung zu genügen haben: $y + dy = f(x + dx)$, wenn zugleich $y = f(x)$ ist. Der Quotient beider Differentiale ist der Differentialquotient der Funktion, für den auch die Bezeichnungen $f'(x)$ und y' gebräuchlich sind.

Die letzte Methode, den Differentialquotienten aus dem Differenzenquotienten hervorgehen zu lassen, lässt sich auch graphisch veranschaulichen. Man substituirt zu dem Zweck in $y = f(x)$ für die Variabele x nach einander die Werthe x, x_1, x_2, x_3 u. s. w. und gewinnt so aus der Funktion die entsprechenden Werthe y, y_1, y_2, y_3 u. s. w. Diese Werthpaare dienen jetzt dazu, um bei Annahme rechtwinkeliger Achsen nach den Regeln der analy-

tischen Geometrie eine Reihe von Punkten M, M_1, M_2, M_3 u. s. w. zu construiren, indem die x-Werthe als Abscissen und die y-Werthe als Ordinaten aufgetragen werden. Rücken hierbei die Substitutionswerthe für x so nahe zusammen, dass ihre Unterschiede zu einem Differential werden, indem $x_1 = x + dx$, $x_2 = x_1 + dx = x + 2dx$, $x_3 = x_2 + dx = x + 3dx$ u. s. w. wird, so sind auch die Differenzen der y-Werthe verschwindend kleine Grössen oder Differentiale der y, die jedoch unter einander nicht gleich sind, wie dies bei den Differentialen von x der Fall ist. Wir setzen deshalb $y_1 = y + dy$, $y_2 = y_1 + dy_1$, $y_3 = y_2 + dy_2$ u. s. w. Zugleich treten die Punkte M, M_1, M_2, M_3 u. s. w. so nahe zusammen, dass die verschwindend kleinen geraden Verbindungslinien als die Elemente einer stetigen Curve angesehen werden dürfen, welche Funktionscurve genannt wird. Die Funktionscurve ist hiernach durch die wichtige Eigenschaft ausgezeichnet, dass Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes durch ihre Masszahlen die zugehörige Funktion $y = f(x)$ befriedigen.

Legen wir nun durch die beiden benachbarten aber noch

Fig. 1.



nicht unendlich nahe gelegenen Punkte M und M_1 einer solchen Funktionscurve eine Sekante, so ist

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Rückt jetzt M_1 längs des Bogens dem Punkte M immer näher, so werden die Differenzen $(x_1 - x)$ und $y_1 - y)$ in dem Augenblick zu ihren Differentialen dx und dy, wo M_1 in möglichster Nähe von M angelangt, die Sehne MM_1 in ein Curvenelement, die Sekante in eine Tangente und β in α übergegangen ist. Dieser besonderen Lage der Punkte M und M_1 zu einander entsprechen die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ und es ist jetzt

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \lim\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f' x). \qquad (2)$$

In Worten lässt sich der Sinn dieser Formel etwa so ausdrücken: Legt man bei rechtwinkeligen Coordinatenachsen durch irgend einen Punkt der Funktionscurve eine Tangente, so sellt der Differentialquotient der Funktion, wenn wir unter x die Abscisse des Berührungspunktes verstehen, die trigonometrische Tangente des Winkels vor, welchen die geometrische Tangente mit der x-Achse bildet.

Nach diesen vorbereitenden Erörterungen ist es uns möglich geworden, die Formeln zu entwicklen, nach welchen aus den einzelnen Funktionsformen der zugehörige Differentialquotient abgeleitet werden kann und beginnen wir mit

$$y = f(x) = ax^n, \ (n \text{ ganz und positiv}).$$

Den Werthen x und x_1 entsprechen die Funktionswerthe $y = ax^n$, $y_1 = ax_1^n$ und daraus entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \lim a\left(\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}\right) = \lim a\,(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x + \ldots\ldots x^{n-1}),$$

wenn man vor dem Uebergang zur Grenze die Division ausführt, um die Form $\frac{0}{0}$ zu umgehen. Wird nun $x_1 = x$, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}. \qquad (3)$$

Wird $n = 0$, so ist $y = a$, d. h. eine Constante, und daher auch

$y_1 = a$. Die Differenz $(y_1 - y)$ ist mithin gleich Null und bleibt Null, wenn man sie durch $(x_1 - x)$ dividirt und den Quotienten zur Grenze überführt. Es ist mithin für:

$$y = a = \text{Constante} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$$

Der Differentialquotient einer Constanten ist gleich Null.

Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich auch an der Funktionscurve nachweisen. Da dieselbe für $y = a$ in eine zur x-Achse parallele gerade Linie übergeht, deren Tangente in allen Punkten mit ihr selbst zusammenfällt, so ist $\alpha = 0$ und daher auch $\operatorname{tg} \alpha = 0$.

Zunächst werden wir jetzt nachweisen müssen, dass Formel (3) auch noch dann anwendbar ist, wenn n eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl ist. Für ein negatives n ist:

$$y = \frac{a}{x^n} = a x^{-n}$$

und den beiden Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen entsprechen die Funktionswerthe: $y = a x^{-n}$ und $y_1 = a x_1^{-n}$, und daraus entsteht:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a\left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x^n}\right)}{x_1 - x} = \frac{-a}{x_1^n x^n} \cdot \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x}.$$

Damit nun dieser Werth beim Uebergang zur Grenze, d. h. für $x_1 = x$, nicht die Form $\frac{0}{0}$ annehme, führen wir vorher die Division aus und finden:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{-a}{x_1^n x^n} (x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x + \ldots\ldots + x^{n-1}),$$

und daraus für $x_1 = x$:

$$\frac{dy}{dx} = -n \,.\, a\, x^{-n-1}.$$

Die umgekehrte Funktion. Zu jeder Funktion $y = f(x)$ ist eine andere denkbar, die so beschaffen ist, dass jedes Werthpaar xy, welches die eine Funktion befriedigt, auch der anderen

Genüge leistet. Mann nennt dann die eine Funktion die Umkehrung der anderen, und es mögen wiederum xy und $x_1 y_1$ zwei Werthpaare sein, die beiden genügen. Dann ist

$$y = f(x) \qquad x = \varphi(y)$$
$$y_1 = f(x_1) \qquad x_1 = \varphi(y_1)$$

und die folgende Formel:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = 1$$

identisch richtig, und sie bleibt auch richtig, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht. So erhält man:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1, \tag{4}$$

d. h. in Worten: Ist eine Funktion die Umkehrung einer anderen, so ist das Produkt aus ihren beiden Differentialquotienten gleich der Einheit.

Auch die Funktionscurve lässt die Richtigkeit dieser Formel leicht erkennen, indem die Relation

$$\frac{y_1 \quad y}{x_1 - x} \cdot \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \beta_1 = 1$$

sich beim Uebergang zur Grenze in die andere verwandelt:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \alpha_1 = 1.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann jetzt nachgewiesen werden, dass die Funktion

$$y = a \sqrt[n]{x} = a\, x^{\frac{1}{n}}$$

ebenfalls nach Formel (3) differentiirt werden kann. Der umgekehrten Funktion $x = \frac{y^n}{a^n}$ entspricht nämlich der Differentialquotient

$$\frac{dx}{dy} = \frac{n y^{n-1}}{a^n} = \frac{n \left(a x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}{a^n} = \frac{n x^{1-\frac{1}{n}}}{a}$$

und daraus geht durch abermalige Umkehrung nach Formel (4) der gesuchte Differentialquotient hervor:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot a x^{\frac{1}{n} - 1}.$$

Ist speciell $y = \sqrt{x}$, so ist $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Eine Funktion von einer Funktion. Wenn y eine Funktion von z ist, wie $y = f(z)$, und z selbst wieder eine Funktion von x ist, wie $z = \varphi(x)$, so muss selbstverständlich y eine Funktion von x sein, welche durch Substitution von z in der Form $y = f(\varphi(x))$ erhalten wird. Dass aber zur Ableitung des Differentialquotienten die angezeigte Substitution nicht unbedingt nöthig ist, soll nun gezeigt werden. Den Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen entsprechen die Funktionswerthe:

$$z = \varphi(x) \qquad z_1 = \varphi(x_1)$$
$$y = f(z) \qquad y_1 = f(z_1),$$

und aus diesen bildet sich leicht die nachfolgende Identität:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{z_1 - z} \cdot \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Durch Uebergang zu den Grenzen geht daraus eine wichtige Relation zwischen den Differentialquotienten hervor, welche heisst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \qquad (5)$$

Ist y eine Funktion von z, und z selbst eine Funktion von x, so ist der Differentialquotient von y nach x gleich dem Produkt aus dem Differentialquotienten von y nach z mit dem Differentialquotienten von z nach x.

Beispiel: $y = (ax)^2 = z^2$, wenn $z = ax$;

$$\frac{dy}{dz} = 2z, \quad \frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dy}{dx} = 2z \cdot a = 2a^2 x.$$

Aus $y = a^2 x^2$ erhält man den nämlichen Werth.

Die Formel (5) erweitert sich dadurch, dass wir annehmen, es sei:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(z), \quad z = \varrho(x),$$

indem alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

So ist es endlich möglich geworden, die Anwendbarkeit der Formel (3) auch für den Fall nachzuweisen, dass der Exponent ein Bruch und die Funktion von der Form ist:

$$y = a\sqrt[n]{x^p} = a x^{\frac{p}{n}}.$$

Durch die Substitution $z = x^p$ wird nämlich:

$$y = a z^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{n} \cdot a z^{\frac{1}{n}-1}, \quad \frac{dz}{dx} = p x^{p-1}$$

und daraus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} \cdot a (x^p)^{\frac{1}{n}-1} \cdot p x^{p-1} = \frac{p}{n} \cdot a x^{\frac{p}{n}-1}.$$

Hiermit ist die Gültigkeit der Formel (3) für alle möglichen Formen des Exponenten nachgewiesen, und wir können ihren Sinn so aussprechen:

Eine Potenz der Variabelen wird differentiirt, indem man ihren Koefficienten mit dem Exponenten multiplicirt und diesen selbst um die Einheit vermindert,

1. Beispiel: $f(x) = 4x^3, \quad f'(x) = 12x^2.$
2. „ „ $= 2x^{-3}, \quad$ „ $= -6x^{-4}.$
3. „ „ $= 4x^{\frac{3}{2}}, \quad$ „ $= 6x^{\frac{1}{2}}.$
4. „ „ $= 2x^{-\frac{1}{2}}, \quad$ „ $= -x^{-\frac{3}{2}}.$

Die zusammengesetzten Funktionen. Werden mehrere einfache Funktionen, wie sie in der am Anfang aufgestellten Tabelle enthalten sind, zu einer Summe oder Differenz, einem Produkte oder Quotienten vereinigt, so heisst eine solche Verbindung eine zusammengesetzte Funktion. Sind zwei derartige Funktionen, wie $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, zur Summe $y = u + v$ verbunden, so erhält man für die zwei besonderen Werthe x und x_1 der unabhängigen Variabelen die entsprechenden Funktionswerthe:

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x) \qquad y = u + v$$
$$u_1 = \varphi(x_1) \qquad v_1 = \psi(x_1) \qquad y_1 = u_1 + v_1$$

und daraus die Quotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{(u_1 + v_1) - (u + v)}{x_1 - x} = \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

woraus dann wieder beim Uebergang zu den Grenzen die Formel hervorgeht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \qquad (6)$$

Zur Erweiterung haben wir darin nur $v + w$ statt v, und $\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$ statt $\frac{dv}{dx}$ zu setzen, für $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$. $y = u + v + w$ finden wir alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx},$$

oder in anderer Schreibweise: $y' = u' + v' + w'$.

Der Differentialquotient einer Summe von Funktionen der nämlichen Variabelen ist gleich der Summe aus den Differentialquotienten der einzelnen Funktionen.

Ist unter gleichen Voraussetzungen $y = u - v$, so ist $u = y + v$; $u' = y' + v'$, und $y' = u' - v'$.

Für das Produkt der beiden Funktionen u und v ergeben sich folgende Beziehungen:

$$u = \varphi(x) \qquad v = \psi(x) \qquad y = u \,.\, v$$
$$u_1 = \varphi(x_1) \qquad v_1 = \psi(x_1) \qquad y_1 = u_1 \,.\, v_1.$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 v_1 - uv}{x_1 - x} = \frac{u_1 v_1 - uv_1 + uv_1 - uv}{x_1 - x}$$

$$= v_1 \,.\, \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \,.\, \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

Beim Uebergang zu den Grenzen wird auch v_1 zu v, und man erhält:

$$\frac{dy}{dx} = v \,.\, \frac{du}{dx} + u \,.\, \frac{dv}{dx}, \text{ oder: } y' = v \,.\, u' + u \,.\, v'.$$

In Worten heisst dies: Ein Produkt aus zwei Funktionen der nämlichen Variabelen wird differentiirt, indem man den Differentialquotienten des ersten Factors mit dem zweiten, und den Differentialquotienten des zweiten Factors mit dem ersten Factor multipirt und beide Produkte addirt.

1. **Beispiel:** $y = x^3 . x^4 = u . v$; $u' = 3x^2$, $v' = 4x^3$, $y' = x^4 . 3x^2 + x^3 . 4x^3 = 7x^6$, ein Werth, welcher auch aus der anderen Form $y = x^7$ hervorgeht.

2. **Beispiel:** $y = (a + bx^2) . (c + dx^3) = u . v$; $u' = 2bx$, $v' = 3dx^2$; $y' = 2bx\,(c + dx^3) + 3dx^2\,(a + bx^2) = 2bcx + 3adx^2 + 5bdx^4$. Das gleiche Resultat wird erhalten, wenn man zuerst die Multiplication ausführt und dann die Summe differentiirt. Geht v über in $v . w$, so verwandelt sich auch v' in $v' . w + w' . v$, und wir erhalten:

$$y = u . v . w, \quad y' = vw . u' + uw . v' + uv . w'.$$

Tritt an Stelle des veränderlichen Factors v die Constante a, so ist $\frac{dv}{dx} = 0$ und daher für $y = a . u$, $\frac{dy}{dx} = a . \frac{du}{dx}$.

Der Differentialquotient eines Produktes aus einer Constanten mit einer Funktion von x ist gleich dem Produkt aus dieser Constanten mit dem Differentialquotienten der Funktion.

Dem Quotienten $y = \frac{u}{v}$ entsprechen, wenn $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ ist, für die Werthe x und x_1 die Funktionswerthe: $y = \frac{u}{v}$, $y_1 = \frac{u_1}{v_1}$, sowie der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v}}{x_1 - x} = \frac{1}{vv_1} . \frac{u_1 v - uv + uv - uv_1}{x_1 - x}$$

$$= \frac{1}{vv_1}\left(v . \frac{u_1 - u}{x_1 - x} - u . \frac{v_1 - v}{x_1 - x}\right).$$

Der Uebergang zu den Grenzwerthen wandelt diese Formel in die nachfolgende um:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v . \frac{du}{dx} - u . \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v . u' - u . v'}{v^2}. \qquad (7)$$

Der Differentialquotient eines Bruches ist gleich dem Differentialquotienten des Zählers multiplicirt mit dem Nenner, weniger dem Differentialquotienten des Nenners multiplicirt mit dem Zähler, das Ganze getheilt durch das Quadrat des Nenners.

Beispiel: $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{u}{v}; \quad u' = 2x, \ v' = 1,$

$$y' = \frac{2x(x-a) - (x^2 - a^2)}{(x-a)^2} = 1.$$

Aus der reducirten Form $y = x + a$ entsteht der nämliche Werth.

Einfacher könnte der Differentialquotient eines Quotienten aus demjenigen des Produktes abgeleitet werden. Ist nämlich

$$y = \frac{u}{v}, \text{ so ist } u = y \cdot v; \quad u' = v \cdot y' + y \cdot v';$$

$$y = \frac{u' - y \cdot v'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}.$$

Alle bisher bezüglich der zusammengesetzten Funktionen aufgestellten Formeln sind als besondere Fälle einer allgemeinen anzusehen, die jetzt entwickelt werden soll. Es mag wieder sein: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $y = f(uv)$, dann entsprechen den Werthen x und x_1 die Funktionswerthe:

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(x) & v = \psi(x) & y = f(u\ v) \\ u_1 = \varphi(x_1) & v_1 = \psi(x_1) & y_1 = f(u_1 v_1), \end{array}$$

und diesen der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1 v_1) - f(u\ v)}{x_1 - x},$$

aus welchem durch Uebergang zur Grenze der Differentialquotient hervorgeht. Bevor dieser aber ausgeführt werden kann, ist eine Umformung des Ausdrucks nothwendig, und daher setzen wir:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1 v_1) - f(u\, v_1) + f(u\, v_1) - f(u\, v)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1 v_1) - f(u\, v_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u\, v_1) - f(u\, v)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x}.$$

Um nun den Einfluss etwas eingehender zu prüfen, den eine Constante a auf den Werth des Differentialquotienten äussert, wählen wir für die Funktion die Form: $y = f(xa)$, legen der Variabelen x die bestimmten Werthe x und x_1 bei und finden die zugehörigen Funktionswerthe: $y = f(x\,a)$, $y_1 = f(x_1\,a)$, aus denen wir dann den Differenzenquotienten zusammenstellen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1\, a) - f(x\, a)}{x_1 - x}.$$

Lassen wir darin x_1 in x übergehen, so bleibt die Constante a unverändert und besitzt im Differentialquotienten den gleichen Werth wie in der Funktion. Liegt nun irgend ein Grund vor, die Constant a der Funktion im Differentialquotienten durch eine andere Constante b zu ersetzen, so kann dies auch schon vor der Differentiation geschehen, weil eben bei dieser Ableitung die Constante, sofern dieselbe nicht ganz verschwindet, ihren Werth nicht verändert. An dem Quotienten $\frac{f(u_1 v_1) - f(u v_1)}{u_1 - u}$ ist die Grösse v_1 genau wie eine Constante betheiligt, indem sie in den beiden Theilen des Zählers gleichwerthig auftritt. Geht nun x_1 über in x, so verändert sich zwar auch v_1, doch besitzt es stets in den beiden Theilen des Zählers ganz gleichen Werth, bis es endlich zu v geworden ist. Darum ist es auch erlaubt, statt des vorstehenden den nachfolgenden Quotienten zur Grenze überzuführen:

$$\frac{f(u_1 v) - f(u v)}{u_1 - u}.$$

Geschieht dies, so erhalten wir den Differentialquotienten der Funktion f so genommen, als ob nur u variabel, v dagegen constant sei. Der so gebildete Differentialquotient wird der partielle Differentialquotient der Funktion nach der Variabelen u genannt und durch ein rundes ∂ von dem totalen Differentialquotienten unterschieden, also durch $\frac{\partial f}{\partial u}$ oder durch $\frac{\partial y}{\partial u}$ bezeichnet. Dass sich der Quotient $\frac{f(u v_1) - f(u v)}{v_1 - v}$ auf die nämliche Weise beim Uebergang zur Grenze in den partiellen Differentialquotienten der Funktion nach der Variabelen v verwandelt, bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung mehr, und wir setzen denselben gleich $\frac{\partial f}{\partial v}$. Die anderen Differenzenquotienten unseres obigen Ausdrucks werden ebenfalls zu Diffe-

rentialquotienten, und die Gleichung gewinnt so beim Uebergang zur Grenze die folgende Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad (8)$$

Sind u und v Funktionen von x, und ist y eine Funktion von u und v, so differentiirt man diese Funktion partiell nach u und nach v, dann u und v selbst total nach x und setzt aus diesen Differentialquotienten denjenigen von y nach x nach der vorstehenden Formel zusammen.

1. Beispiel: Sind u und v zu einer Summe verbunden, so ist speciell $y = f(uv) = u + v$, $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 1$, und $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot \frac{du}{dx} + 1 \cdot \frac{dv}{dx}$.

2. Beispiel: Bilden u und v eine Differenz, so ist $y = f(uv) = u - v$, und $\frac{\partial f}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$.

3. Beispiel: Die Vereinigung von u und v zu einem Produkt entspricht die besondere Form: $y = f(uv) = u \cdot v$; $\frac{\partial f}{\partial u} = v$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u$, $\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$.

4. Beispiel: Ist endlich $y = f(uv) = \frac{u}{v} = u \cdot v^{-1}$, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = v^{-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -uv^{-2}, \quad \frac{dy}{dx} = v^{-1} \cdot \frac{du}{dx} - uv^{-2} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

5. Beispiel: Wenn y eine Funktion nur von u ist, indem die andere Variabele v ganz fehlt, so fällt in (8) einmal der zweite Theil fort, ferner ist $\frac{\partial f}{\partial u}$ gleichbedeutend mit $\frac{df}{du}$ oder $\frac{dy}{du}$. Für die Funktionsform $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, finden wir dann: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, oder die Formel (5).

Es erübrigt uns jetzt noch zu zeigen, auf welche Weise Formel (8) erweitert werden kann. Aus den drei Funktionen von x, nämlich $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, $w = \varrho(x)$ setzen wir die Funktion $y = f(uvw)$ zusammen, legen der unabhängigen Variabelen x die Werthe x und x_1 bei, bilden die entsprechenden Funktionswerthe:

$$u = \varphi(x), \quad v = \psi(x), \quad w = \varrho(x), \quad y = f(uvw),$$
$$u_1 = \varphi(x_1), \quad v_1 = \psi(x_1), \quad w_1 = \varrho(x_1), \quad y_1 = f(u_1 v_1 w_1),$$

und daraus den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1 v_1 w_1) - f(uvw)}{x_1 - x}.$$

Um diesen Quotienten für den Uebergang zur Grenze geeignet umzuformen, fügen wir die Funktionswerthe $f(uv_1w_1)$ und $f(uvw_1)$ im Zähler positiv und negativ zu, multipliciren und dividiren einzelne Theile mit $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $(w_1 - w)$ und erhalten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(u_1 v_1 w_1) - f(u v_1 w_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$
$$+ \frac{f(u v_1 w_1) - f(u v w_1)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x} + \frac{f(u v w_1) - f(uvw)}{w_1 - w} \cdot \frac{w_1 - w}{x_1 - x}.$$

Geht jetz x_1 über in x, so verschwinden zugleich die Differenzen: $(y_1 - y)$, $(u_1 - u)$, $(v_1 - v)$, $w_1 - w)$ und die 3 aus Differenzen der Funktionswerthe bestehenden Zähler, und damit werden die Differenzenquotienten zu Differentialquotienten. Unser Ausdruck gestaltet sich so zu der Formel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx}. \qquad (9)$$

Explicite und implicite, algebraische und transcendente Funktionen. In Funktionen von der Form: $y = f(x)$ umfasst das Funktionszeichen f nur solche Termen, welche aus der unabhängigen Variabelen x und aus Constanten zusammengesetzt sind. So geformte Funktionen nennen wir explicit oder entwickelt. Sind dagegen die beiden Variabelen mit einander und mit den Constanten in beliebiger Weise verbunden, so wird ein solcher auf Null gebrachter Ausdruck eine implicite oder unentwickelte Funktion der beiden Variabelen genannt und durch

$f(xy) = 0$ symbolisch bezeichnet. Als Beispiel mögen die beiden Formen $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ und $y^2 + x^2 - a^2 - 0$ der nämlichen Funktion dienen.

Es ist bekannt, dass die einfachen Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und ihre Quotienten $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, sowie ihre Umkehrungen $\arcsin x$ u. s. w., und ebenso die einfachen Exponentialfunktionen e^x und a^x und deren Umkehrungen $l\,x$ und $\operatorname{Log} x$ in unendliche Reihen nach der Variabelen x entwickelt werden können. Wir nennen desswegen diese einfachen Funktionen transcendent und ebenso alle zusammengesetzten, in welchen eine oder einige einfache transcendente Funktionen in irgend einer Weise auftreten. Als Gegensatz werden alle übrigen Funktionen, soweit sie hier in Betracht kommen sollen, algebraische Funktionen genannt.

§. 3. Aufgaben zur Differentiation algebraischer Funktionen.

1) $y = a$	$\frac{dy}{dx} = 0$
2) $y = ax$	„ $= a$
3) $y = ax + b$	„ $= a$
4) $y = ax^2$	„ $= 2ax$
5) $y = 2x^3$	„ $= 6x^2$
6) $y = 4ax^5$	„ $= 20ax^4$
7) $y = -\frac{5x^3}{a}$	„ $= \frac{-15x^2}{a}$
8) $y = a + 2bx + cx^2$	„ $= 2b + 2cx$
9) $y = \frac{a}{x} = ax^{-1}$	„ $= \frac{-a}{x^2}$
10) $y = \frac{a}{x^4}$	„ $= \frac{-4a}{x^5}$
11) $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	„ $= \frac{1}{2\sqrt{x}}$
12) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$	„ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

13) $y = \sqrt[n]{x^p}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{n} \cdot \sqrt[n]{x^{p-n}}$

14) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

15) $y = \frac{1}{5\sqrt[4]{x^3}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{3}{20} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$

16) $y = x^3 \sqrt{x}$ $\qquad$ „ $= \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5}$

17) $y = \frac{a}{x^3 \sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{7}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^9}}$

18) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 \sqrt[3]{x}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{11}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{17}}}$

19) $y = x\sqrt{x\sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{7}{4} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

20) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3\sqrt{x}}{m}}$ $\qquad$ „ $= \frac{7}{6}\sqrt[6]{\frac{x}{m^2}}$.

Die nächstfolgenden Beispiele werden durch Einführung einer Zwischenvariabelen z nach der unter (5) angeführten Formel differentiirt:

21) $y = f(z), \quad z = \varphi(x)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$

22) $y = (a + bx)^2 = z^2$ $\qquad$ „ $= 2b(a + bx)$

23) $y = (a - bx)^3$ $\qquad$ „ $= -3b(a - bx)^2$

24) $y = (a + bx^2)^2$ $\qquad$ „ $= 4bx(a + bx^2)$

25) $y = (a - bx^3)^5$ $\qquad$ „ $= -15bx^2(a - bx^3)^4$

26) $y = (a + x^2)^3$ $\qquad$ „ $= 6x(a + x^2)^2$

27) $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$ $\qquad$ „ $= \frac{3(ax-1)^2}{x^4}$

28) $y = (a + bx + cx^2)^n$ $\qquad$ „ $= n(a+bx+cx^2)^{n-1} \cdot (b+2cx)$

29) $y = \frac{1}{a+bx} = z^{-1}$ $\qquad$ „ $= \frac{-b}{(a+bx)^2}$

30) $y = \frac{1}{(a-bx^2)^3}$ $\qquad$ „ $= \frac{6bx}{(a-bx^2)^4}$

31) $y = \frac{1}{(b-x^p)^n}$ $\qquad$ „ $= \frac{pnx^{p-1}}{(b-x^p)^{n+1}}$

32) $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^3}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1-x)^4}$

33) $y = \sqrt{a+bx} = z^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$

34) $y = \sqrt{2px}$ $\qquad$ „ $= \frac{p}{\sqrt{2px}}$

35) $y = \sqrt{f(x)}$ $\qquad$ „ $= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

36) $y = \frac{1}{\sqrt{a-bx}} = z^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{b}{2\sqrt{(a-bx)^3}}$

37) $y = \sqrt{a-bx^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-bx}{\sqrt{a-bx^2}}$

38) $y = \sqrt{2ax+x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}$

39) $y = \sqrt{1-x^4}$ $\qquad$ „ $= \frac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

40) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{a+x}}{\sqrt{a^2-x^2}}$

41) $y = \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{x-a}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$

42) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x^3)^4}}$ $\qquad$ „ $= \frac{4x^2}{\sqrt[3]{(2-x^3)^7}}$

43) $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-a)^3}}$ $\qquad$ „ $= \frac{-3}{4\sqrt[4]{(x-a)^7}}$

44) $y = \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{p}{n} \cdot \frac{b}{\sqrt[n]{(a+bx)^{p+n}}}$.

Bei den folgenden Beispielen kommen ausser der angeführten Substitutionsformel auch die zwei folgenden zur Anwendung:

45) $y = u \cdot v$ $\qquad \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$

46) $y = \frac{u}{v}$ $\qquad$ „ $= \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$

47) $y = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$ $\qquad$ „ $= -4x^3$

48) $y = (a + bx)(a - bx)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -2b^2x$

49) $y = (1 - 2x)(1 + 3x)$ $\qquad$ „ $= 1 - 12x$

50) $y = x^4(a - 2x^3)^2$ $\qquad$ „ $= 4x^3(a - 2x^3)(a - 5x^3)$

51) $y = (a + x)\sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{a - 3x}{2\sqrt{a - x}}$

52) $y = x\sqrt{1 + x}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 + 3x}{2\sqrt{1 + x}}$

53) $y = x^2\sqrt{a - x}$ $\qquad$ „ $= \frac{4ax - 5x^2}{2\sqrt{a - x}}$

54) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

55) $y = \frac{a}{x}\sqrt{a^2 + x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-a^3}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}$

56) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1}$ $\qquad$ „ $= -\frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{(x^3 - 1)^2}$

57) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ $\qquad$ „ $= \frac{-2}{(1 + x)^2}$

58) $y = \frac{1 - 2x^2}{2 - x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-6x}{(2 - x^2)^2}$

59) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$ $\qquad$ „ $= \frac{4x(x - 3)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$

60) $y = \frac{(a + x^2)^3}{(b - x^3)^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{6x(a + x^2)^2(b + ax)}{(b - x^3)^3}$

61) $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$

62) $y = \frac{\sqrt{a + bx}}{x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2a + bx}{2x^2\sqrt{a + bx}}$

63) $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 + x}{2\sqrt{(1 + x)^3}}$

64) $y = \sqrt{\frac{a + bx}{a - bx}}$ $\qquad$ „ $= \frac{ab}{(a - bx)^2}\sqrt{\frac{a - bx}{a + bx}}$

65) $y = \frac{1}{x\sqrt{a + x}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2a + 3x}{2x^2\sqrt{(a + x)^3}}$

66) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2 - a^2}}$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + a^2}{2\sqrt{x(x^2 - a^2)^3}}$

67) $y = (x + \sqrt{1 + x})^2$ „ $= \frac{2 + 3x + (2x + 1)\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 + x}}$.

§. 4. Die Differentialquotienten der trigonometrischen und cyklometrischen Funktionen.

Die einfache trigonometrische Funktion $y = \sin x$ gibt zu den Werthen x und x_1 der unabhängigen Variabelen die Funktionswerthe: $y = \sin x$ und $y_1 = \sin x_1$, und dazu den Differenzenquotienten:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(x_1 + x) \sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$
$$= \cos \tfrac{1}{2}(x_1 + x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Nun ist bekannt, dass der Quotient $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ kleiner als 1 ist, sich aber der Einheit mehr und mehr nähert, wenn α abnimmt, weil dann $\sin \alpha$ und $\operatorname{arc} \alpha$ mehr und mehr einander gleich werden und im Augenblick ihres gleichzeitigen Verschwindens ganz zusammenfallen und so den Quotienten 1 besitzen. Mithin ist auch $\lim \frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)} = 1$, und dann gewinnt der ganze Ausdruck beim Uebergang zur Grenze die folgende Gestalt:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \qquad (10)$$

Der Differentialquotient von $\sin x$ ist gleich $\cos x$.

Auf die nämliche Weise wird auch der Differentialquotient von $y = \cos x$ abgeleitet. Den beiden Werthen x und x_1 entsprechen die Funktionswerthe $y = \cos x$ und $y_1 = \cos x_1$, und diesen wieder der Differenzenquotient:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\cos x_1 - \cos x}{x_1 - x} = \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(x_1 + x) \sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{x_1 - x}$$
$$= -\sin \tfrac{1}{2}(x_1 + x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Lässt man darin x_1 in x übergehen, so wird der zweite Factor wieder gleich 1, und der ganze Ausdruck gestaltet sich zu der folgenden Formel:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x. \qquad (11)$$

Der Differentialquotient von $\cos x$ ist gleich $-\sin x$.

Uebrigens kann diese Formel auch aus der vorhergehenden abgeleitet werden. $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$, wenn $z = \frac{\pi}{2} - x$ ist. Da nun $\frac{dy}{dz} = \cos z$, $\frac{dz}{dx} = -1$, so ist $\frac{dy}{dx} = \cos z \,.\, (-1) = -\cos z = -\sin x$.

Die Differentialquotienten von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{cotg} x$ ergeben sich aus den vorhergehenden auf die einfachste Weise:

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x};\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Aufgaben:

68) $y = \sin(ax) = \sin z$ — $\frac{dy}{dx} = a\cos(ax)$

69) $y = \cos(ax)$ — „ $= -a\sin(ax)$

70) $y = \sin\frac{x}{a}$ — „ $= \frac{1}{a}\,.\,\cos\frac{x}{a}$

71) $y = a\cos\frac{x}{a}$ — „ $= -\sin\frac{x}{a}$

72) $y = \sin(x^n) = \sin z$ — „ $= n x^{n-1}\cos(x^n)$

73) $y = \cos\sqrt{ax}$ — „ $= -\frac{a\sin\sqrt{ax}}{2\sqrt{ax}}$

74) $y = a\sin\frac{a}{x}$ — „ $= -\frac{a^2}{x^2}\,.\,\cos\frac{a}{x}$

75) $y = a\cos\frac{1}{x}$ — „ $= \frac{a}{x^2}\,.\,\sin\frac{1}{x}$

76) $y = \sin\sqrt{\frac{1}{x}}$ — „ $= \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\,.\,\cos\sqrt{\frac{1}{x}}$

77) $y = \operatorname{tg}(ax)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{\cos^2(ax)}$

78) $y = a \operatorname{tg} \dfrac{x}{a}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{a}}$

79) $y = a \operatorname{tg} \dfrac{a}{x}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{a^2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{a}{x}}$

80) $y = \sin(a + bx) = \sin z$ $\qquad$ „ $= b \cos(a + bx)$

81) $y = \cos(a - bx^2)$ $\qquad$ „ $= 2bx \sin(a - bx^2)$

82) $y = \sin^2 x = z^2$ $\qquad$ „ $= \sin(2x)$

83) $y = \cos^2(ax)$ $\qquad$ „ $= -a \sin(2ax)$

84) $y = 2 \sin^n(ax)$ $\qquad$ „ $= na \sin^{n-2}(ax) \sin(2ax)$

85) $y = \cos^n \dfrac{a}{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{na}{x^2} \cdot \cos^{n-1} \dfrac{a}{x} \sin \dfrac{a}{x}$

86) $y = \dfrac{1}{\sin x} = z^{-1}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$

87) $y = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^n$ $\qquad$ „ $= \dfrac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$

88) $y = \dfrac{1}{2} \sin x + \sin \dfrac{x}{2}$ $\qquad$ „ $= \cos \dfrac{3x}{4} \cos \dfrac{x}{4}$

89) $y = \dfrac{1}{12} \cos 3x - \dfrac{1}{4} \cos x$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{1}{2} \cdot \cos 2x \sin x$

90) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{4}{\sin^2(2x)}$

91) $y = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ $\qquad$ „ $= 3 \cos 3x$

92) $y = \dfrac{1}{2 \sin^2 x} - \dfrac{1}{4 \sin^4 x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$

93) $y = \dfrac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2 \sin^2\left(45^\circ + \dfrac{x}{2}\right)}{\cos^2 x}$

94) $y = \sin x \cos x$ $\qquad$ „ $= \cos 2x$

95) $y = (1 - \cos 2x)^2$ $\qquad$ „ $= 16 \sin^3 x \cos x$

96) $y = 2 \cos^2(x + a) - \cos 2x$ $\qquad$ „ $= -4 \cos(a + 2x) \sin a$

97) $y = (x \operatorname{tg} x)^2$ $\qquad$ „ $= x \operatorname{tg} x \left(\dfrac{\sin 2x + 2x}{\cos^2 x}\right)$

98) $y = 3 \sin x \cos^2 x + \sin^3 x$ $\qquad$ „ $= 3 \cos x \cos 2x$

99) $y = (4\sin x - 8\sin^3 x)\cos x$ $\quad \frac{dy}{dx} = 4\cos 4x$

100) $y = \cos x\,(a + b\sin x)$ $\quad$ „ $= b\cos 2x - a\sin x$

101) $y = \sin x \sin(a - x)$ $\quad$ „ $= \sin(a - 2x)$

102) $y = \frac{a - b\cos x}{a + b\cos x}$ $\quad$ „ $= \frac{2ab\sin x}{(a + b\cos x)^2}$

103) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $\quad$ „ $= \frac{-1}{\cos^2(45^0 + x)}$

104) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$ $\quad$ „ $= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

105) $y = \sin x - x\cos x$ $\quad$ „ $= x\sin x$

Die cyklometrischen Funktionen sind die Umkehrungen der trigonometrischen, und heissen: arc sin x, arc cos x, arc tg x, arc cotg x, und desshalb lassen sich auch ihre Differentialquotienten aus denjenigen der trigonometrischen Funktionen durch Umkehrung ableiten.

1. $y = \text{arc}\sin x$

ist die Umkehrung von $x = \sin y$. Nun ist:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

und daraus entsteht:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (12)$$

2. $y = \text{arc}\cos x$

gehört zu $x = \cos y$. Da nun:

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

ist, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad (13)$$

Kürzer ist die folgende Ableitung:

$$y = \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \text{arc}\sin x; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \text{arc}\,\text{tg}\, x.$

Es ist $x = \text{tg}\, y$, $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$, und da-

raus durch Umkehrung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad (14)$$

4. $y = \text{arc cotg}\, x$.

Aus $y = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\, x$ erhält man leicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (15)$$

Die Ableitung wäre auch so möglich: $y = \text{arc cotg}\, x = \text{arc tg}\, \frac{1}{x}$ $= \text{arc tg}\, z$, wenn $z = \frac{1}{x}$.

Nun ist $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$; $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad (16)$$

Aufgaben.

106) $y = \text{arc sin}\,(a\,x)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-(a^2 x^2)}}$

107) $y = \text{arc cos}\,(a - x)$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{1-(a-x)^2}}$

108) $y = \text{arc sin}\, \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-2a}{a^2 + x^2}$

109) $y = \text{arc sin}\, \frac{1}{x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

110) $y = \text{arc sin}\, \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

111) $y = \text{arc cos}\, \frac{b + a\cos x}{a + b\cos x}$ $\qquad$ „ $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b\cos x}$

112) $y = \text{arc cos}\left(\frac{a - x}{x}\right)$ $\qquad$ „ $= \frac{a}{x\sqrt{2ax - a^2}}$

113) $y = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \text{arc sin}\, x\sqrt{\frac{b}{a}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{a - b\,x^2}}$

114) $y = \text{arc sin}\, \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{1 + x^2}$

115) $y = \text{arc tg}\, \sqrt{a\,x}$ $\qquad$ „ $= \frac{a}{2(1 + a\,x)\sqrt{a\,x}}$

116) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{a-x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{(a-x)^2 + x^2}$

117) $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{-1}{1+(x-2)^2}$

118) $y = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

119) $y = \operatorname{arc\,cotg} \sqrt{2-x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1}{2(3-x)\sqrt{2-x}}$

120) $y = \operatorname{arc\,cotg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

121) $y = \operatorname{arc\,cotg} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{-1}{2(1+x^2)}$

122) $y = \operatorname{arc} (\cos = \sin x)$ $\qquad$ „ $= -1$

123) $y = \operatorname{arc} (\operatorname{tg} = m \operatorname{tg} x)$ $\qquad$ „ $= \dfrac{m}{m^2 + (1-m^2)\cos^2 x}$

124) $y = \operatorname{arc\,cotg} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

125) $y = \operatorname{arc} \left(\operatorname{tg} = a \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad$ „ $= \dfrac{\frac{1}{2} a}{1 + (a^2 - 1)\sin^2 \frac{x}{2}}$

126) $y = a \,.\, \operatorname{arc\,sin} \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

127) $y = \sqrt{ax - x^2} - a \,.\, \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{a-x}{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a-x}{x}}$$

128) $y = (x - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x) \,.\, \operatorname{arc\,tg} x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{x + x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}.$

§. 5. **Exponential- und logarithmische Funktionen.**

In der Binomialentwicklung

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \frac{x^2}{n^2} + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \frac{x^3}{n^3} + \ldots\ldots$$

mag x eine beliebig wählbare Variabele und n eine ganze posi-

tive Zahl vorstellen. So lange n einen endlichen Werth behält, bricht die Reihe mit dem Gliede x^n ab nnd besitzt dann eine ebenfalls endliche Summe. Um nun diese Summe auch für den Fall beurtheilen zu können, dass wir uns unter n eine Zahl vorzustellen haben, welche ohne Aufhören wächst bis sie jeden endlichen Werth überschritten hat, oder, wie man sagt, unendlich gross geworden ist, geben wir der Reihe die folgende Gestalt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{1.2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots \quad (A)$$

Ihr allgemeines Glied heisst:

$$T=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{p}{n}\right)\frac{x^{p+1}}{1.2\ldots.p+1}$$

Da die Reihe erst mit dem Gliede x^n abbricht, so wird mit n auch die Anzahl der Glieder unendlich und die Reihe transcendent. Zugleich gehen die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{p}{n}$ in Null über, so lange p das Bereich der endlichen Zahlen nicht überschreitet, und unsere Reihe gestaltet sich vom ersten bis zum $p$ten Gliede für jeden noch so grossen, jedoch endlichen Werth von p wie folgt:

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\frac{x^p}{1.2.3\ldots p} \quad (B)$$

Ist aber auch p, welches nicht grösser als n werden kann, in das Bereich der unendlich grossen Zahlen übergetreten, wobei endliche Unterschiede ganz unberücksichtigt bleiben dürfen, so ist der Quotient $\frac{p}{n}$ nicht mehr gleich Null, sondern hat während des Uebergangs von p aus dem Endlichen ins Unendliche den Werth 1 angenommen. Wir ersehen daraus, dass für unendliche Werthe von p die letzten Factoren des allgemeinen Gliedes verschwinden, und dass die Reihe (A) abbricht, sobald p in das Bereich der unendlich grossen Zahlen eingetreten ist, so dass die Reihe (B), fortgesetzt bis zu unendlich grossen Werthen von p, als der Grenzwerth der Reihe (A) angesehen werden kann. Hiernach setzen wir:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots \quad (C)$$

Um nun auch nachzuweisen, dass die Reihe (C) für jeden beliebigen Werth von x convergent ist, wählen wir das Glied $\frac{x^p}{1.2.3\ldots p}$ so aus, dass p bereits grösser ist, als der für die Variabele x angenommene Werth und scheiden in der Reihe diejenigen Glieder ab, welche dem erwähnten vorausgehen und einen endlichen Werth zur Summe haben. Die übrigen Glieder heissen:

$$R = \frac{x^p}{1.2\ldots p}+\frac{x^{p+1}}{1.2\ldots p+1}+\ldots\ \ldots$$

$$R = \frac{x^p}{1.2\ldots p}\left(1+\frac{x}{(p+1)}+\frac{x^2}{(p+1)(p+2)}+\ldots\ldots\right)$$

Wir setzen nun:

$$U = 1+\frac{x}{(p+1)}+\frac{x^2}{(p+1)(p+2)}+\ldots\ldots.$$

ferner die Vergleichsreihe:

$$S = 1+\frac{x}{p}+\frac{x^2}{p^2}+\ldots\ldots.$$

und wissen, dass U kleiner als S ist. Da nun der Exponent $\frac{x}{p}$ dieser geometrischen Reihe S der Voraussetzung gemäss kleiner als 1 ist, so hat S den Werth $\frac{p}{p-x}$ zur Summe, so dass $R < \frac{x^p}{1.2\ldots p} \cdot \frac{p}{p-x}$ und die Reihe (C) convergent sein muss. Für negative Werthe von x lässt sich die Convergenz leicht aus dem Vorhergehenden folgern.

Zum Zweck weiterer Werthermittlung setzen wir in (C) $x = 1$ und erhalten:

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots\ldots = e$$

Weil nun:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots < \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$$

und der Werth der rechten Seite = 1 ist, so muss e einen Werth zwischen 2 und 3 besitzen. Wir finden $e = 2{,}718281\ldots$

Da für ein unendlich wachsendes n die beiden Werthe n und nx gleichzeitig unendlich werden, wenn x eine endliche Zahl bedeutet, so dürfen wir in (C) nx statt x setzen, ohne dass dadurch an dem Werth etwas geändert wird. So entsteht:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x.$$

Durch Vergleich der beiden Werthe für $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ erhält man schliesslich die Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots. \qquad (17)$$

Wir hielten es für angemessen, die vorstehende Reihe hier mittelst der Grenzmethode zu entwickeln, sehen aber die gegebenen Erläuterungen keineswegs als erschöpfende Beweisführung an und verweisen in dieser Beziehung auf die ausführlichen Lehrbücher der Analysis.

Zu der Funktion $y = e^x$ finden wir mittelst der Reihe (17) den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots. = e^x. \qquad (18)$$

Um die allgemeinere Exponentialfunktion $y = a^x$ zu differentiiren, setzen wir $a = e^m$ und haben alsdann $m = la$, d. h. m ist der natürliche Logarithmus von a. Da nun $y = (e^m)^x = e^{mx} = e^z$, wenn $z = mx$, so findet man:

$$\frac{dy}{dz} = e^z, \frac{dz}{dx} = m \text{ und } \frac{dy}{dx} = me^z = m\,(e^m)^x = a^x\,la. \quad (19)$$

Die Differentialquotienten der beiden logarithmischen Funktionen gehen wieder durch Umkehrung aus den vorhergehenden hervor. Ist:

$$y = lx$$

$$\text{so ist } x = e^y, \ \frac{dx}{dy} = e^y, \ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}. \qquad (20)$$

Ebenso gehört zu der Funktion:

$$y = \text{Log}_a\, x$$

die Umkehrung $x = a^y$, und $\frac{dx}{dy} = a^y\,.\,la$, woraus dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y . la} = \frac{1}{la} \cdot \frac{1}{x}. \qquad (21)$$

Aufgaben.

129) $y = e^{ax} = e^z$ $\qquad \frac{dy}{dx} = a e^{ax}$

130) $y = e^{-ax}$ $\qquad$ „ $= - a e^{-ax}$

131) $y = a e^{\frac{x}{a}}$ $\qquad$ „ $= e^{\frac{x}{a}}$

132) $y = e^{x^2}$ $\qquad$ „ $= 2 x e^{x^2}$

133) $y = e^{2\sqrt{ax}}$ $\qquad$ „ $= \frac{a e^{2\sqrt{ax}}}{\sqrt{ax}}$

134) $y = e^{\cos x}$ $\qquad$ „ $= - \sin x\, e^{\cos x}$

135) $y = e^{\sin^2 x}$ $\qquad$ „ $= \sin 2x\, e^{\sin^2 x}$

136) $y = e^{\operatorname{arc\,tg} x}$ $\qquad$ „ $= \frac{e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{1 + x^2}$

137) $y = x^2 e^x$ $\qquad$ „ $= x e^x (2 + x)$

138) $y = e^x (x - 1)$ $\qquad$ „ $= x e^x$

139) $y = e^x x^n$ $\qquad$ „ $= (x + n) e^x x^{n-1}$

140) $y = (x^2 - 2x + 2) e^x$ $\qquad$ „ $= x^2 e^x$

141) $y = a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$ $\qquad$ „ $= 2 \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$

142) $y = \cos x\, e^{\sin x}$ $\qquad$ „ $= (\cos^2 x - \sin x) e^{\sin x}$

143) $y = e^{2x} \sin^2 x$ $\qquad$ „ $= e^{2x} (2 \sin^2 x + \sin 2x)$

144) $y = \frac{e^x}{x^n}$ $\qquad$ „ $= \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$

145) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ $\qquad$ „ $= \frac{2 e^x}{(e^x + 1)^2}$

146) $y = \frac{e^x (x - n)}{x^n}$ $\qquad$ „ $= \frac{e^x (x + (x - n)^2)}{x^{n+1}}$

147) $y = \sqrt{e^{ax}}$ $\qquad$ „ $= \frac{a}{2} \sqrt{e^{ax}}$

148) $y = \sqrt{x (e^x + 1)}$ $\qquad$ „ $= \frac{e^x (x + 1) + 1}{2 \sqrt{x (e^x + 1)}}$

149) $y = a^{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\qquad$ „ $= \frac{x a^{\sqrt{x^2+1}}\, l a}{\sqrt{x^2 + 1}}$

150) $y = a^{\operatorname{tg} x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a^{\operatorname{tg} x}\, l\, a}{\cos^2 x}$

151) $y = (a^{mx} + b)^p$ $\qquad$ " $= p\,(a^{mx} + b)^{p-1}\, a^{mx}\, m\, l\, a$

152) $y = a^x \,.\, x^a$ $\qquad$ " $= a^x\, x^{a-1}\,(a + x\, l\, a)$

153) $y = l\,(a - x)$ $\qquad$ " $= -\frac{1}{a - x}$

154) $y = l\,(x^n) = n\,.\,l\,x$ $\qquad$ " $= \frac{n}{x}$

155) $y = l\,\frac{1}{x} = -\,l\,x$ $\qquad$ " $= -\frac{1}{x}$

156) $y = l\,(a\,x) = l a + l x$ $\qquad$ " $= \frac{1}{x}$

157) $y = (l\,x)^n = z^n$ $\qquad$ " $= \frac{n\,(l\,x)^{n-1}}{x}$

158) $y = l\left(\frac{a}{a + x}\right)$ $\qquad$ " $= -\frac{1}{a + x}$

159) $y = l\,x + l\,x^2 = 3\,l\,x$ $\qquad$ " $= \frac{3}{x}$

160) $y = l\,(1 - x^2) = l\,z$ $\qquad$ " $= -\frac{2\,x}{1 - x^2}$

161) $y = l\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ $\qquad$ " $= -\frac{a}{x\,(a + x)}$

162) $y = l\,(a - \sqrt{x})$ $\qquad$ " $= \frac{1}{2\,(x - a\,\sqrt{x})}$

163) $y = l\,(e^{mx} + e^{-mx})$ $\qquad$ " $= \frac{m\,(e^{mx} - e^{-mx})}{e^{mx} + e^{-mx}}$

164) $y = l\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ $\qquad$ " $= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

165) $y = x - 2\sqrt{x} + 2\,l\,(1 + \sqrt{x})$ $\qquad$ " $= \frac{x}{(x + \sqrt{x})}$

166) $y = l\,\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ $\qquad$ " $= \frac{-a}{x\,\sqrt{a^2 - x^2}}$

167) $y = l\,(a + b\,e^x)$ $\qquad$ " $= \frac{b\,e^x}{a + b\,e^x}$

168) $y = l\,\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = -\frac{1}{2}\,l\,(1 + x^2)$ $\qquad$ " $= -\frac{x}{1 + x^2}$

169) $y = l\,\sqrt{2\,a\,x - x^2}$ $\qquad$ " $= \frac{a - x}{2\,a\,x - x^2}$

170) $y = l\frac{1+x}{1-x}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{1-x^2}$

171) $y = l\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ $\qquad$ „ $= \frac{a}{a^2-x^2}$

172) $y = l\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{x(1-x^2)}$

173) $y = \frac{1}{x} l x$ $\qquad$ „ $= \frac{1-lx}{x^2}$

174) $y = l\frac{1+a^{\sqrt{x}}}{1-a^{\sqrt{x}}}$ $\qquad$ „ $= \frac{a^{\sqrt{x}} l a}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-a^{2\sqrt{x}}}\right)$

175) $y = x\sqrt{a^2+x^2} + l(x+\sqrt{a^2+x^2})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+a^2+1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

176) $y = l(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$

177) $y = \frac{m}{2} l(x^2-a^2) + \frac{n}{2a} l\frac{x-a}{x+a}$ $\qquad$ „ $= \frac{mx+n}{x^2-a^2}$

178) $y = \frac{1+x^2}{2} l(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$ $\qquad$ „ $= x\, l(1+x^2)$

179) $y = \frac{3}{4} l\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4} l\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$$

180) $y = l(x-1) + 3l(x+1) + l(x^2+1) + 5\,\mathrm{arc\,tg}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^3+3x^2+2x-7}{x^4-1}$$

181) $y = \frac{1}{\sqrt{a}} l\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}$ $\qquad$ „ $= \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}$

182) $y = \frac{1}{x} l\frac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ „ $= \frac{2}{x(1-x^2)} - \frac{1}{x^2} l\frac{1+x}{1-x}$

183) $y = \frac{1-x^4}{2x^2} l\frac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1+x^2}{x^2} - \frac{x^4+1}{x^3} l\frac{1+x}{1-x}$

184) $y = \frac{x}{1-x} l x$ $\qquad$ „ $= \frac{1-x+lx}{(1-x)^2}$

185) $y = l\sin x$ $\qquad$ „ $= \mathrm{cotg}\, x$

186) $y = l\cos x$ $\qquad$ „ $= -\mathrm{tg}\, x$

187) $y = l\,\mathrm{tg}\,x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin 2x}$

188) $y = l\,\mathrm{cotg}\,x = l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad " = -\frac{2}{\sin 2x}$

189) $y = l\sin\left(\frac{x-a}{x}\right) = l\sin z \qquad " = \frac{a}{x^2}\,\mathrm{cotg}\left(\frac{x-a}{x}\right)$

190) $y = l\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 \qquad " = -\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$

191) $y = l\sin\sqrt{a+bx} \qquad " = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}\,\mathrm{cotg}\sqrt{a+bx}$

192) $y = l\cos\sqrt{\frac{1}{x}} \qquad " = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}\sqrt{\frac{1}{x}}$

193) $y = l\left(\frac{a + b\,\mathrm{tg}\,x}{a - b\,\mathrm{tg}\,x}\right) \qquad " = \frac{2ab}{a^2 - (a^2 + b^2)\sin^2 x}$

194) $y = l\,\mathrm{tg}\,x + l\cos x = l\sin x \qquad " = \mathrm{cotg}\,x$

195) $y = l\,f(x) = lz \qquad " = \frac{f'(x)}{f(x)}.$

Der Differentialquotient des natürlichen Logarithmus einer Funktion ist gleich einem Bruch, dessen Nenner die Funktion und dessen Zähler der Differentialquotient der Funktion ist.

Funktionen von der Form $y = f(uv) = u^v$, worin u und v Funktionen von x sind, werden nach Formel (8) differentiirt. Es ist dann $\frac{\partial f}{\partial u} = v u^{v-1}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = u^v\,l u$, und

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx} + u^v\,lu \cdot \frac{dv}{dx}. \qquad (22)$$

1. Beispiel: $y = (ax)^{mx}$; $u = ax$, $v = mx$; $\frac{du}{dx} = a$, $\frac{dv}{dx} = m$;

$$\frac{dy}{dx} = m\,(ax)^{mx}\,(1 + lx + la).$$

2. Beispiel: $y = (\sin x)^{\cos x}$; $\frac{du}{dx} = \cos x$, $\frac{dv}{dx} = -\sin x$;

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\cos x - 1}\,(\cos^2 x - \sin^2 x\,l\sin x).$$

Derartige Funktionen können etwas bequemer behandelt werden, wenn man beiderseits den Logarithmus nimmt und sich erinnert,

dass eine Funktion von y, wenn y selbst eine Funktion von x ist, in der Weise nach x differentiirt werden kann, dass man dieselbe zuerst nach y differentiirt und diesen Differentialquotienten noch mit demjenigen von y nach x multiplicirt.

3. Beispiel: $y = x^x$; $ly = x\,lx$; $\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 + lx$;
$$\frac{dy}{dx} = (1 + lx)\,y = x^x(1 + lx).$$

4. Beispiel: $y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$; $ly = x(la - lx)$; $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{x}\right)^x (la - lx - 1)$.

5. Beispiel: $y = \left(\frac{1 - x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)} = z^z$; $\frac{dy}{dz} = z^z(1 + lz)$,
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{1-x}{x}\right)^{\left(\frac{1-x}{x}\right)} \left[1 + l\left(\frac{1-x}{x}\right)\right] \cdot \frac{1}{x^2}.$$

6. Beispiel: $y = \sqrt[x]{x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2}(1 - lx)$.

7. Beispiel: $y = \sqrt[x]{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{lx - 1}{x^2}\right)$.

8. Beispiel: $y = (a + bx)^{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{(a + bx)^{\frac{1}{x}}}{x^2} \left(\frac{bx}{a+bx} - l(a+bx)\right)$.

9. Beispiel: $y = \left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^x$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{2}} \left[l\left(\frac{a}{x}\right) - 1\right]$.

10. Beispiel: $y = (\text{arc tg}\, x)^x$;
$$\frac{dy}{dx} = (\text{arc tg}\, x)^x \left(l\,\text{arc tg}\, x + \frac{x}{\text{arc tg}\, x} \cdot \frac{1}{1 + x^2}\right).$$

§. 6. Implicite Funktionen.

Die Entwicklung der Differentialquotienten war seither an die Voraussetzung geknüpft, dass die Funktion in der expliciten Form $y = f(x)$ gegeben sei. Sind dagegen die beiden Variabelen zu der impliciten Funktion $f(xy) = 0$ verbunden, so ist y noch immer von x abhängig, d. h. eine Funktion von x, nur ist die Form dieser Funktion, wir wollen sie $y = \varphi(x)$ nennen, nicht bekannt, und dadurch wird das seitherige Verfahren, den Differentialquotienten zu bilden, wesentlich modificirt.

Sind nun in $z = f(uv)$ die beiden Variabelen u und v Funktionen von x, so ist nach (8) $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$. Wird in dieser Formel speciell $u = x$ und $v = y$, d. h. gleich einer bestimmten, wenn auch noch nicht in expliciter Form gegebenen Funktion von x, und $z = 0$, so geht über:

$$z = f(uv) \text{ in } f(xy) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \text{ in } \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} \text{ in } \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dv}{dx} \text{ in } \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} \text{ in } 0.$$

Zur Bestimmung des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ erhalten wir so die folgende Relation:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ oder: } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \qquad (23)$$

Ist die explicite Form einer Funktion nicht bekannt, so kann doch der Differentialquotient von y nach x aus den partiellen Differentialquotienten der impliciten Form: $f(xy) = 0$, nach dieser Formel zusammen gesetzt werden.

1. Beispiel: $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Man findet entweder:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{und daraus } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

$$\text{oder: } \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Aus der hier darstellbaren expliciten Form:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \text{ entsteht: } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

2. Beispiel: $f = y^n - x^p = 0$; $ny^{n-1}\frac{dy}{dx} - px^{p-1} = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{ny^{n-1}} = \frac{p}{n} \cdot \frac{x^{p-1}}{\left(x^{\frac{p}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{p}{n} x^{\frac{p}{n}-1}.$$

Nach der zweiten Formel gibt es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -px^{p-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{px^{p-1}}{ny^{n-1}} \text{ u. s. w.}$$

Will man die bei expliciten Formen vorkommenden Nenner, Wurzelzeichen u. dergl. vermeiden, so geht man zu den impliciten Formen über. Statt $\frac{dy}{dx}$ wird gewöhnlich y' gesetzt.

3. Beispiel: $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f=y^3x^2-1=0$; $3y^2y'x^2+2y^3x=0$, $y'=-\frac{2y}{3x}$, oder: $y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$, wie auch durch direkte Ableitung aus der expliciten Form.

4. Beispiel: $y=x\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$, $\frac{y^2}{x^2}=\frac{a+bx}{a-bx}$,

$$f=bxy^2+bx^3-ay^2+ax^2=0;$$

$$by^2+2bxyy'+3bx^2-2ayy'+2ax=0,$$

$$y'=\frac{by^2+3bx^2+2ax}{2ay-2bxy}.$$

5. Beispiel: $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, oder $f=y^4-2y^2x-1=0$;

$$4y^3y'-4yxy'-2y^2=0,\ y'=\frac{y}{2(y^2-x)}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

Aufgaben.

196) $f=ax+by+c=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=a$, $\frac{\partial f}{\partial y}=b$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}$.

197) $f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

198) $y=\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$; $f=y^2(x-a)-(x+a)^3=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2-3(x+a)^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y(x-a),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x+a)^2-y^2}{2y(x-a)}=\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3}.$$

199) $f=a^{x-y}-x^y=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=a^{x-y}\,la-yx^{y-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-a^{x-y}\,la-x^y\,lx,\ \frac{dy}{dx}=\frac{x\,la-y}{x\,l(ax)}.$$

200) $f = \sin x - \cos y = 0;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y} = -1.$

201) $f = e^{x+y} - a^x = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} - a^x\, l a,\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y},$
$\frac{dy}{dx} = -1 + la.$

202) $f = e^{ax+by} - c = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax+by},\ \frac{\partial f}{\partial y} = b e^{ax+by},$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$ Aus der einfacheren Form: $ax + by = lc$ folgt das gleiche Resultat.

203) $f = (e^x - 1)(e^y - 1) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(e^y - 1),\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^y(e^x - 1),$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - 1}{e^x - 1}.$

204) $f = ay - e^{\sqrt{b-x}} = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{\sqrt{b-x}}}{2\sqrt{b-x}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = a,$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{b-x}}.$

205) $f = \cos x - x\cos y = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x - \cos y,$
$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin y,\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + \cos y}{x\sin y}.$

206) $f = y(x + \sin x) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = y(1 + \cos x),\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin x,$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\cos^2\frac{x}{2}}{x + \sin x}.$

207) $f = x\sin(x-y) - (x+y) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x-y) + x\cos(x-y) - 1,$
$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\cos(x-y) - 1,\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y) + x\cos(x-y) - 1}{x\cos(x-y) + 1}.$

In den folgenden Aufgaben sollen die partiellen Differentialquotienten nicht getrennt entwickelt, sondern die ganzen Gleichungen nach der Formel differentiirt werden:

$$f(xy) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

208) $f = y^2 - 2px = 0;\qquad 2yy' - 2p = 0,\ y' = \frac{p}{y}.$

209) $f=\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-c=0;\quad \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{b}{y}}\,y'=0,$

$y'=-\sqrt{\frac{by}{ax}}.$

210) $f=\arcsin\frac{x}{y}-lx=0;\quad \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}\,y'-\frac{1}{x}=0,$

$y'=\frac{xy-y\sqrt{y^2-x^2}}{x^2}.$

211) $f=y^2+x^2-(ax+b)^2=0;\quad yy'+x-a(ax+b)=0.$

212) $f=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2\lambda xy=0;$

$(x-\alpha+\lambda y)+(y-\beta+\lambda x)y'=0.$

213) $f=y^2(x^2-1)-ax^2=0;\quad y(x^2-1)y'+x(y^2-a)=0.$

214) $f=(ax+by+c)(\alpha x+\beta y+\gamma)-mx^2-ny^2=0;$

$(a+by')(\alpha x+\beta y+\gamma)+(\alpha+\beta y')(ax+by+c)$

$-2mx-2nyy'=0.$

215) $f=(x^2+y^2-1)(ax+by)-mx^2-ny^2=0;$

$2(x+yy')(ax+by)+(a+by')(x^2+y^2-1)$

$-2mx-2nyy'=0.$

216) $f=(1-ax)(x^2+y^2)-4=0;$

$-a(x^2+y^2)+2(x+yy')(1-ax)=0.$

217) $f=\left(1+x+\frac{1}{y}\right)\left(1+y+\frac{1}{x}\right)=0;\quad \left(1-\frac{y'}{y^2}\right)\left(1+y+\frac{1}{x}\right)$

$+\left(y'-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+x+\frac{1}{y}\right)=0.$

218) $f=(x^2+y^2-ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0;$

$(x^2+y^2-ax)(2x+2yy'-a)-a^2(x+yy')=0.$

219) $f=x^2y^2-(a^2-x^2)(y+b)^2=0;$

$xy^2+x^2yy'+x(y+b)^2-(y+b)y'(a^2-x^2)=0.$

220) $f=a^x-e^{x-y}=0;\quad a^x la-e^{x-y}+e^{x-y}y'=0,\quad y'=1-la.$

Einfacher so: $xla=x-y;\quad y'=1-la.$

221) $f=y^2-2ye^x+2xly=0;$

$yy'-e^x(y+y')+ly+xy^{-1}y'=0.$

222) $f=\sin x-\sin(2y-x)=0;$

$\cos x+\cos(2y-x)-2y'\cos(2y-x)=0.$

223) $f = y \sin x + x^2 y^2 + a \cos y + b = 0;$
$y \cos x + y' \sin x + 2xy(y + xy') - a y' \sin y = 0.$

224) $f = e^x \cos y - e^y \sin x = 0;$
$e^x \cos y - e^y \cos x - (e^x \sin y + e^y \sin x) y' = 0.$

225) $f = \sin x + \sin y + \sin(x+y) = 0;$

$$y' = -\frac{\cos x + \cos(x+y)}{\cos y + \cos(x+y)}.$$

§. 7. **Funktionen von der Form:**
$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$

Oft ist es zweckmässig, y in der Weise von x abhängig zu machen, dass man beide als Funktionen einer dritten Variabelen darstellt, indem man setzt:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Kann t daraus eliminirt werden, so erhält man die entsprechende direkte Funktion zwischen x und y wieder. So geht z. B. $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ leicht in $f = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ über.

Da t in diesen Formen die eigentliche unabhängige Variabele ist, so legen wir ihr die besonderen Werthe t und t_1 bei, erhalten die entsprechenden Funktionswerthe:

$$\begin{array}{ll} x = \varphi(t) & x_1 = \varphi(t_1) \\ y = \psi(t) & y_1 = \psi(t_1) \end{array}$$

die wir zu folgender Identität zusammensetzen:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\frac{y_1 - y}{t_1 - t}}{\frac{x_1 - x}{t_1 - t}}. \qquad \text{(A)}$$

Da nun der Uebergang von t_1 in t auch diejenigen von x_1 in x und von y_1 in y zur Folge hat, so gehen die Differenzenquotienten in (A) gleichzeitig in Differentialquotienten über, und wir erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \qquad (24)$$

Unter der Gestalt: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, oder: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ ist (24) nur eine Wiederholung von Formel (5).

1. Beispiel: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $\frac{dx}{dt}=-a\sin t$, $\frac{dy}{dt}=b\cos t$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\operatorname{cotg} t$. Wird t eliminirt, so heisst die Funktion: $f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, oder: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, und daraus für den Differentialquotienten die beiden Formen:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y},\ \text{oder}\ \frac{dy}{dx}=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Da nun $\operatorname{cotg} t=\frac{bx}{ay}$ und auch $=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ist, so haben die 3 Formen des Differentialquotienten gleichen Werth.

2. Beispiel: $x=\cos\alpha\,.\,t$, $y=\sin\alpha\,.\,t+b$, $\frac{dx}{dt}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=\sin\alpha$, $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$. Wird t eliminirt, so entsteht: $y=\operatorname{tg}\alpha\,x+b$, und daraus: $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha$.

Aufgaben.

226) $y=at$, $x=a(1-t)$ — $\frac{dy}{dx}=-1$.

227) $y=\frac{a}{a-t}$, $x=\frac{b}{b-t}$ — „ $=\frac{a(b-t)^2}{b(a-t)^2}$

228) $y=\frac{1-t}{1+t}$, $x=\frac{2t}{1+t}$ — „ $=-1$

229) $y=\frac{t^2}{2}$, $x=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$ — „ $=\sqrt{\frac{t}{2}}$

230) $y=(e^{at}-1)^3$, $x=(e^{at}-1)^2$ — „ $=\frac{3}{2}(e^{at}-1)$

231) $y = \dfrac{4(a-t)^3}{a^2 t^2}$ $\quad x = \dfrac{3a-2t}{at}$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2 t}$

232) $y = \sin^2 t$ $\quad x = \sin 2t$ $\quad$ „ $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2t$

233) $y = b \sin^2 t$ $\quad x = a \cos^2 t$ $\quad$ „ $= -\dfrac{b}{a}$

234) $y = (1-\cos t)$ $\quad x = (t - \sin t)$ $\quad$ „ $= \operatorname{cotg} \dfrac{t}{2}$

235) $y = a \cos^2 \dfrac{bt}{2}$ $\quad x = b \operatorname{tg} \dfrac{bt}{2}$ $\quad$ „ $= -\dfrac{a}{b} \sin bt \cos^2 \dfrac{bt}{2}$

236) $y = \operatorname{tg} t$ $\quad x = \dfrac{1}{\cos^2 t}$ $\quad$ „ $= \frac{1}{2} \operatorname{cotg} t$

237) $y = \sin t - t\cos t$ $\quad x = \cos t + t \sin t$ $\quad$ „ $= \operatorname{tg} t$

238) $y = \frac{1}{2}\sin t + \sin \dfrac{t}{2}$ $\quad x = \frac{1}{2}\cos t + \cos \dfrac{t}{2}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{cotg} \frac{3}{4} t$

239) $y = t - \cos t$ $\quad x = t - \sin t$ $\quad$ „ $= \dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}{\sin^2 \frac{t}{2}}$

240) $y = \dfrac{a \sin t}{1 + b\cos t}$ $\quad x = \dfrac{c \cos t}{1 + b \cos t}$ $\quad$ „ $= -\dfrac{ab + a\cos t}{c \sin t}$

241) $y = \sin t (\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$ $\quad x = \cos t (\cos 2t)^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{cotg} 3t$

242) $y = \dfrac{\sin^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad x = \dfrac{\cos^3 t}{(\cos 2t)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad$ „ $= -\operatorname{tg} 3t$

243) $y = 2\sin t - \sin 2t$ $\quad x = 2\cos t - \cos 2t$ $\quad$ „ $= \operatorname{tg} \frac{3}{2} t$

244) $y = (a + r)\sin t - a \sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$
$x = (a + r)\cos t - a \cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$ $\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{2a+r}{2a}t$

245) $y = \arc\sin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
$x = \arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ $\quad$ „ $=1.$

§. 8. Differentialquotienten höherer Ordnung.

Explicite Funktionen. Der Differentialquotient von $y = f(x)$ ist wieder eine Funktion von x oder eine Constante und kann desshalb den nämlichen Operationen unterworfen werden, durch welche er selbst aus der gegebenen Funktion hervorgegangen ist. Die Funktion, welche entsteht, wenn man den Differentialquotienten einer vorgelegten nochmals differentiirt, wird deren zweiter Differentialquotient genannt und dem ersten analog auf folgende Weise symbolisch bezeichnet:

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}. \quad \text{oder:} \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Wird dieser zweite Differentialquotient abermals differentiirt, so erhält man den dritten der ursprünglichen Funktion, welcher durch das Symbol $\frac{d^3y}{dx^3}$ dargestellt wird. Eine $n$malige Wiederholung dieser Ableitung führt zu dem Differentialquotienten $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Einfacher werden die Differentialquotienten höherer Ordnung auf folgende Weise bezeichnet:

$$y', y'', y''' \ldots . y^{(n)}, \text{ oder: } f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots . f^{(n)}(x).$$

1. Beispiel: $y = x^p$; $\frac{dy}{dx} = px^{p-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = p(p-1)x^{p-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = p(p-1)(p-2)x^{p-3} \ldots . \frac{d^ny}{dx^n} = p(p-1)(p-2) \ldots . (p-n+1)x^{p-n}$.

2. Beispiel: $y = \sin x$; $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y'''' = \sin x$ u. s. w.

3. Beispiel: $f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, u. s. w.

Aufgaben.

246) $y = x^3$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 6x$

247) $y = (a - bx)^4$ $\qquad$ „ $= 12b^2(a - bx)^2$

248) $y = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2$ $\qquad$ „ $= 12x^2 - 12x + 10$

249) $y = \sqrt[3]{x^2}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$

250) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

251) $y = \sqrt{2px}$ $\qquad$ „ $= -\dfrac{p^2}{\sqrt{(2px)^3}}$

252) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a + bx}}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{4b^2}{9\sqrt[3]{(a + bx)^7}}$

253) $y = x + \sqrt[3]{(x - a)^5}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{10}{9\sqrt[3]{(x - a)}}$

254) $y = x(a - x)$ $\qquad$ „ $= -2$

255) $y = x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2}{x^3}$

256) $y = \dfrac{x}{(a - x)^2}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{4a + 2x}{(a - x)^4}$

257) $y = e^{mx}$ $\qquad$ „ $= m^2 e^{mx}$

258) $y = a^{mx}$ $\qquad$ „ $= a^{mx}(m\,l\,a)^2$

259) $y = e^{\varphi(x)}$ $\qquad$ „ $= e^{\varphi(x)}[(\varphi'(x))^2 + \varphi''(x)]$

260) $y = e^{-x^2}$ $\qquad$ „ $= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

261) $y = l(1 + x^2)$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$

262) $y = x\,l\,x$ $\qquad$ „ $= \dfrac{1}{x}$

263) $y = x^2\,l\,x$ $\qquad$ „ $= 3 + 2\,l\,x$

264) $y = \dfrac{l\,x}{x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{2\,l\,x - 3}{x^3}$

265) $y = \sin(a - 2x)$ $\qquad$ „ $= -4\sin(a - 2x)$

266) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$ $\qquad$ „ $= \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}$

267) $y = \text{arc}\cos x$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

268) $y = x e^{\sin x}$ $\qquad$ „ $= e^{\sin x}(2\cos x + x\cos^2 x - x\sin x)$

269) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$ $\qquad$ „ $= \left(\frac{1}{x}\right)^x \left(\frac{1}{x} + (1 + lx)^2\right)$

270) $y = \text{arc}\sin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

271) $y = \text{arc}\sin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\qquad$ „ $= \frac{4x}{(1+x^2)^2}$

272) $y = \text{arc}\,\text{tg}\,\frac{x}{a}$ $\qquad$ „ $= -\frac{2ax}{(x^2+a^2)^2}$

273) $y = x^6$ $\qquad y''' = 6.5.4\,x^3$

274) $y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ „ $= -\frac{1.2.3}{x^4}$

275) $y = \sqrt{x}$ $\qquad$ „ $= \frac{1.3.5}{8\sqrt{x^5}}$

276) $y = l(a + bx)$ $\qquad$ „ $= \frac{2b^3}{(a+bx)^3}$

277) $y = \sin(nx)$ $\qquad$ „ $= -n^3\cos(nx)$.

Ist $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$. Wird auf beiden Seiten nochmals differentiirt, so entsteht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dy}{dz}.$$

Eine weitere Differentiation ergibt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\cdot\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3}\left(\frac{dz}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^3z}{dx^3}.$$

Beispiel: $y = (a + bx^2)^3 = z^3$, $z = a + bx^2$;

$\frac{dy}{dz} = 3z^2$, $\frac{d^2y}{dz^2} = 6z$, $\frac{d^3y}{dz^3} = 6$, $\frac{dz}{dx} = 2bx$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, $\frac{d^3z}{dx^3} = 0$;

$\frac{d^3y}{dx^3} = 24\,b^2x\,(3a + 5bx^2)$.

Implicite Funktionen haben bekanntlich die Form $f(xy) = 0$ und leiten ihre Differentialquotienten aus der Gleichung: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ ab. Wird nun der partielle Diffe-

∂f nochmals partiell nach x differentiirt, so er-

ialquotienten der Funk-

hn durch $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Ebenso

ient dargestellt, welcher

nach y differentiirt. In

$\frac{\partial^2 f}{x \partial y}$, d. h. $\frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}$ den-

ıen, der dadurch gewon-

ach x und dann partiell

:heidet sich der andere

$\frac{f}{\partial x}$, nur dadurch, dass

st nach y und dann nach

$= 0;$

$3x^2 - 3y^2$

$= -6y$

$= 6x.$

$\frac{\cdot}{x}$. Es soll nun nachge-

entialquotienten bei allen impliciten Funktionen identisch gleich sind. Setzt man in:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1 y) - f(xy)}{x_1 - x}$$

Will man die bei expliciten Formen vorkommenden Nenner, Wurzelzeichen u. dergl. vermeiden, so geht man zu den impliciten Formen über. Statt $\frac{dy}{dx}$ wird gewöhnlich y' gesetzt.

3. Beispiel: $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f=y^3x^2-1=0$; $3y^2y'x^2+2y^3x=0$, $y'=-\frac{2y}{3x}$, oder: $y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$, wie auch durch direkte Ableitung aus der expliciten Form.

4. Beispiel: $y=x\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$, $\frac{y^2}{x^2}=\frac{a+bx}{a-bx}$,

$$f=bxy^2+bx^3-ay^2+ax^2=0;$$
$$by^2+2bxyy'+3bx^2-2ayy'+2ax=0,$$
$$y'=\frac{by^2+3bx^2+2ax}{2ay-2bxy}.$$

5. Beispiel: $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, oder $f=y^4-2y^2x-1=0$; $4y^3y'-4yxy'-2y^2=0$, $y'=\frac{y}{2(y^2-x)}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}$.

Aufgaben.

196) $f=ax+by+c=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=a$, $\frac{\partial f}{\partial y}=b$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{b}$.

197) $f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}.$$

198) $y=\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$; $f=y^2(x-a)-(x+a)^3=0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2-3(x+a)^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y(x-a),$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(x+a)^2-y^2}{2y(x-a)}=\tfrac{3}{2}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3}.$$

199) $f=a^{x-y}-x^y=0$; $\frac{\partial f}{\partial x}=a^{x-y}\,la-yx^{y-1}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-a^{x-y}\,la-x^y\,lx,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{x\,la-y}{x\,l(ax)}.$$

200) $f = \sin x - \cos y = 0;\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y} = -1.$

201) $f = e^{x+y} - a^x = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} - a^x\, la,\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y},$
$\frac{dy}{dx} = -1 + la.$

202) $f = e^{ax+by} - c = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = a e^{ax+by},\ \frac{\partial f}{\partial y} = b e^{ax+by},$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}.$ Aus der einfacheren Form: $ax + by = lc$ folgt das gleiche Resultat.

203) $f = (e^x - 1)(e^y - 1) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(e^y - 1),\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^y(e^x - 1),$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - 1}{e^x - 1}.$

204) $f = ay - e^{\sqrt{b-x}} = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^{\sqrt{b-x}}}{2\sqrt{b-x}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = a,$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2\sqrt{b-x}}.$

205) $f = \cos x - x \cos y = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin x - \cos y,$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \sin y,\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + \cos y}{x \sin y}.$

206) $f = y(x + \sin x) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = y(1 + \cos x),\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + \sin x,$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y\cos^2\frac{x}{2}}{x + \sin x}.$

207) $f = x\sin(x-y) - (x+y) = 0;\ \frac{\partial f}{\partial x} = \sin(x-y) + x\cos(x-y) - 1,$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\cos(x-y) - 1,\ \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(x-y) + x\cos(x-y) - 1}{x\cos(x-y) + 1}.$

In den folgenden Aufgaben sollen die partiellen Differentialquotienten nicht getrennt entwickelt, sondern die ganzen Gleichungen nach der Formel differentiirt werden:

$$f(xy) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0.$$

208) $f = y^2 - 2px = 0; \qquad 2yy' - 2p = 0,\ y' = \frac{p}{y}.$

278) $f = x^3 - x^2 y + y^5 = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 5y^4 - x^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 20y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -2x.$

279) $f = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(2x^2 + 2y^2 + a^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(2x^2 + 2y^2 - a^2)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 + 4x^2 + 2a^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 8xy.$

280) $f = e^{\sin x} - x e^{\sin y} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x e^{\sin y} \cos y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\sin x} \cos x - e^{\sin y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x e^{\sin y}(\sin y - \cos^2 y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -e^{\sin y} \cos y.$

281) $f = y + y e^{-x} + x = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + e^{-x}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = -y e^{-x} - 1$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y e^{-x}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -e^{-x}.$

282) $f = \sin x + \sin y + \sin(x-y) = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin y - \sin(x-y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x-y)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \sin(x-y).$

Zur Entwicklung von $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ist bei einfacheren Funktionen auch folgende Methode möglich:

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0; \quad x + yy' = 0, \quad 1 + y'^2 + y'' y = 0,$$

$$y'' = -\frac{1 + y'^2}{y} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Funktionen von der Form: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Der erste Differentialquotient ist unter (24) entwickelt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Wird auf beiden Seiten nach x differentiirt, so entsteht:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Unter Berücksichtigung der Relation $\frac{dt}{dx} = 1 : \frac{dx}{dt}$ geht diese Formel über in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Aufgaben.

283) $y = b \sin t$, $x = a \cos t$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$

284) $y = a(1 - \cos t)$, $x = a(t - \sin t)$ $\qquad$ " $= -\frac{1}{4 \sin^4 \frac{t}{2}}$

285) $y = \sin^2 t$, $x = \cos 2t$ $\qquad$ " $= 0$

286) $y = e^{at}$, $x = e^{-at}$ $\qquad$ " $= 2e^{3at}$

Der zweite Differentialquotient kann aus dem ersten auch auf folgende Weise abgeleitet werden:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Beispiel: $y = \frac{1}{1-t}$, $x = lt$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{(1-t)^2}, \quad \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt} = \frac{1+t}{(1-t)^3}, \quad \frac{dt}{dx} = t, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t^2+t}{(1-t)^3}.$$

§. 9. Anwendung der Differentialrechnung zur Ermittlung der Werthe unbestimmter Formen.

Die Formen $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$. Es kann sein, dass die beiden Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für den nämlichen Werth $x = a$ verschwinden. Ein Bruch von der Form $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ hat dann für $x = a$ den unbestimmten Werth $f(a) = \frac{0}{0}$. Dass aber trotz dieser Unbestimmtheit der Werth ein ganz bestimmter ist, soll zunächst an Beispielen erläutert werden.

1. Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$, $f(a) = \frac{0}{0}$. Werden aber vor der Substitution $x = a$ Zähler und Nenner durch $(x - a)$ dividirt, so wird $f(x) = \frac{x^2 + a\,x + a^2}{x + a}$, woraus dann $f(a) = \frac{3}{2}a$ gefunden wird.

2. Beispiel: $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $f(0) = \frac{0}{0}$. Zieht man 1 von der Reihe für e^x ab, dividirt den Rest durch x und setzt dann $x = 0$, so findet man $f(0) = 1$.

3. Beispiel: $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$; $f(0) = \frac{0}{0}$. Die reducirte Form: $f(x) = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ giebt: $f(0) = \frac{1}{2}$.

4. Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - \sqrt{a^3 x}}{\sqrt{a x} - a}$; $f(a) = \frac{0}{0}$.

$$f(a) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\left(\frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{a^3}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}\right)_{x=a} = \left(x + \sqrt{a x} + a\right)_{x=a} = 3a.$$

Als Ursache der Unbestimmtheit zeigen uns die Beispiele den Umstand an, dass Zähler und Nenner den gemeinsamen Factor $(x - a)$ besitzen, der für $x = a$ verschwindet und so zugleich Zähler und Nenner auf Null bringt. Statt nun, wie geschehen, diesen Factor aufzusuchen und vor der Substitution

durch Division zu entfernen, bedienen wir uns mit Vortheil der Methode des Differentiirens. Ist

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ und } f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = \frac{0}{0},$$

so ist $f(a + \delta) = \left[\frac{\varphi(x + \delta)}{\psi(x + \delta)}\right]_{x=a}$ nicht mehr unbestimmt und geht in $f(a)$ über, wenn δ nach und nach verschwindet. Da weiter $\varphi(a) = 0$ und $\psi(a) = 0$ sind, so kann man auch setzen:

$$f(a+\delta) = \left[\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\psi(x+\delta) - \psi(x)}\right]_{x=a} = \left[\frac{\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{(x+\delta) - x}}{\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{(x+\delta) - x}}\right]_{x=a}$$

Lassen wir δ in Null übergehen, so wird gleichzeitig:

$$\lim f(a + \delta) = f(a),$$

$$\lim \left[\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{(x+\delta) - x}\right]_{x=a} = [\varphi'(x)]_{x=a} = \varphi'(a),$$

$$\lim \left[\frac{\psi(x+\delta) - \psi(x)}{(x+\delta) - x}\right]_{x=a} = [\psi'(x)]_{x=a} = \psi'(a),$$

$$f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \tag{27}$$

1. Beispiel: $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$, $f(2) = \frac{0}{0}$,

$\varphi'(x) = 2x - 5$, $\psi'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, $f(2) = \frac{\varphi'(2)}{\psi'(2)} = -\frac{1}{3}$.

2. Beispiel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $f(0) = \left(\frac{\cos x}{1}\right)_{x=0} = 1$,

3. Beispiel: $f(x) = \frac{a^x - 1}{x a^x}$; $f(0) = \frac{0}{0}$, $\varphi'(0) = l a$,

$\psi'(0) = (a^x + x a^x l a)_{x=0} = 1$, $f(0) = l a$.

Es kommt vor, dass ein Bruchwerth auch in der neuen Form noch unbestimmt bleibt, indem auch $f(a) = \left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$ ist. Das angezeigte Verfahren der Werthermittelung muss dann bei der neuen Form unverändert wiederholt werden.

4. Beispiel: $f(x) = \frac{x^3 - a x^2 - a^2 x + a^3}{2 x^3 - 3 a x^2 + a^3}$; $f(a) = \frac{0}{0}$, daher
$f(a) = \left[\frac{3 x^2 - 2 a x - a^2}{6 x^2 - 6 a x}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$, und $f(a) = \left[\frac{6 x - 2 a}{12 x - 6 a}\right]_{x=a} = \frac{2}{3}$.

5. Beispiel: $f(x) = \frac{\sin 2 x - 2 \sin x}{2 e^x - x^2 - 2 x - 2}$; $f(0) = \frac{0}{0}$. Die Unbestimmtheit verschwindet erst nach dreimaliger Differentiation von Zähler und Nenner, und man findet:

$$f(0) = \left[\frac{\varphi'''(x)}{\psi'''(x)}\right]_{x=0} = \left[\frac{2 \cos x - 8 \cos 2 x}{2 e^x}\right]_{x=0} = -3.$$

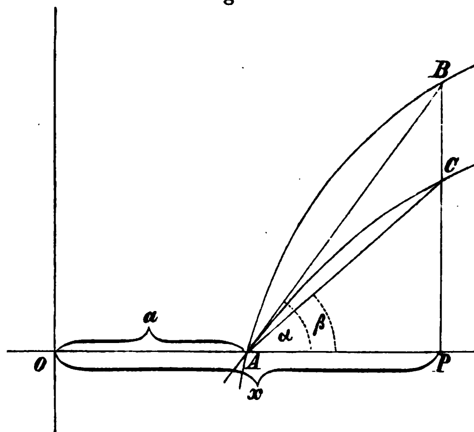
Will man von der Voraussetzung ausgehen, dass $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nur darum für $x = a$ gleichzeitig verschwinden, weil sie den gemeinsamen Factor $(x - a)$ besitzen, so kann (27) etwas kürzer auf folgende Weise entwickelt werden:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{(x-a)\,\varrho(x)}{(x-a)\,\pi(x)}, \quad f(a) = \frac{\varrho(a)}{\pi(a)};$$

$\varphi'(x) = \varrho(x) + (x - a)\,\varrho'(x)$, $\quad \psi'(x) = \pi(x) + (x - a)\,\pi'(x)$.
Für $x = a$, aber auch nur für diesen Werth von x, wird $\varrho(a) = \varphi'(a)$, $\pi(a) = \psi'(a)$ und $f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$.

Auch eine geometrische Ableitung der Formel (27) ist möglich. Wenn AB die Funktionscurve des Zählers $u = \varphi(x)$, AC diejenige

Fig. 2.



des Nenners $v = \psi(x)$ und $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = 0$ ist, so müssen sich die beiden Curven in dem Punkt A schneiden, da ihm die Werthe $x = a$, $u = 0$, $v = 0$ entsprechen. Nun sollen dem beliebigen Werth $x = OP$ die Funktionswerthe $u = \varphi(x) = BP$ und $v = \psi(x) = CP$ zugehören. Es ist dann

$$f(x) = \frac{u}{v} = \frac{(x-a)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(x-a)\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Geht x in a über, so werden die Sekanten AB und AC zu Tangenten an die entsprechenden Curven im Punkt A, und damit geht zugleich $\mathrm{tg}\,\alpha$ in $\varphi'(a)$, $\mathrm{tg}\,\beta$ in $\psi'(a)$ über. Für $x = a$ ist mithin

$$f(a) = \left(\frac{u}{v}\right)_{x=a} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}.$$

Wird $f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{\infty}{\infty}$, so ist $f(a) = \left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$,

und damit ist diese Form auf die vorhergehende zurückgeführt. Wir finden so:

$$f(a) = \left[\frac{\frac{-\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}}{\frac{-\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}\right]_{x=a} = \left[\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)^2\right]_{x=a}$$

$$f(a) = \frac{\psi'(a)}{\varphi'(a)} \cdot [f(a)]^2, \quad f(a) = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}. \qquad (28)$$

Hat ein Bruch für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so findet man seinen Werth, indem man Zähler und Nenner differentiirt und dann erst $x = a$ setzt.

Aufgaben.

287) $f(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{8x^2 - 2x - 1}$ $\qquad f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{6}$

288) „ $= \frac{x^n - 1}{x - 1}$ $\qquad f(1) = n$

289) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ $f(1) = \dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{3}{5}$

290) „ $= \dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x - 8}{x^4 - 8x^2 + 12}$ $f(\pm\sqrt{2}) = \dfrac{-4 \mp \sqrt{2}}{4}$

291) „ $= \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$

$f(1) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

292) „ $= \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ $f(7) = \pm\dfrac{1}{56}$

293) „ $= \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$ $f(3) = \dfrac{8}{69}$

294) „ $= \dfrac{a - \sqrt[5]{2x^5 - a^5}}{\sqrt[3]{x^3 - a^3}}$ $f(a) = 0$

295) „ $= \dfrac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$

$f(a) = \dfrac{16}{9}a$

296) „ $= \dfrac{x}{e^x - e^{-x}}$ $f(0) = \dfrac{1}{2}$

297) „ $= \dfrac{e^x - e^{-x}}{1 - x - l(e - x)}$ $f(0) = \dfrac{2e}{1-e}$

298) „ $= \dfrac{x e^{\cos x}}{1 - \sin x - \cos x}$ $f(0) = -e$

299) „ $= \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ $f(0) = 1$

300) „ $= \dfrac{a^x - 1}{x}$ $f(0) = la$

301) „ $= \dfrac{lx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $f(1) = 0$

302) „ $= \dfrac{a^{lx} - x}{lx}$ $f(1) = la - 1$

303) „ $= \dfrac{l(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}$ $f(2) = \dfrac{4}{7}$

304) „ $= \dfrac{l(a+x) - la}{x}$ $f(0) = \dfrac{1}{a}$

305) $f(x) = \dfrac{l\,\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\quad f(a) = \dfrac{1}{a}$

306) „ $= \dfrac{\sin(nx)}{x}$ $\quad f(0) = n$

307) „ $= \dfrac{\sin x}{\sin 2x}$ $\quad f(\pi) = -\dfrac{1}{2}$

308) „ $= \dfrac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$ $\quad f(0) = \dfrac{a}{b}$

309) „ $= \dfrac{2\sin x - 1}{\cos 3x}$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$

310) „ $= \dfrac{x\cos x}{x - \sin x}$ $\quad f(0) = \dfrac{1}{0}$

311) „ $= \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ $\quad f(0) = 0$

312) „ $= \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{2e^x - 2 - 2x}$ $\quad f(0) = 0$

313) „ $= \dfrac{2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 1}{2\sin^2 x - \cos^2 x - \frac{1}{2}}$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{10}{3}$

314) „ $= \dfrac{\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3}$ $\quad f(\operatorname{arc\,tg} x = 3) = 2$

315) „ $= \dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$ $\quad f(2) = 0$

316) „ $= \dfrac{\arcsin \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\quad f(a) = \dfrac{1}{a}$

317) „ $= \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x - x^2}}$ $\quad f(0) = 1$

318) „ $= \dfrac{l\cos x}{x}$ $\quad f(0) = 0$

319) „ $= \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$ $\quad f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

320) „ $= \dfrac{l(1+e^x)}{a + bx}$ $\quad f(\infty) = \dfrac{1}{b}$

321) $f(x) = \frac{l(a+x)}{x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

322) „ $= \frac{x^4}{a^x}$ $\qquad f(\infty) = 0$

323) „ $= \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

324) „ $= \frac{\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{cotg} x}$ $\qquad f(0) = \frac{1}{2}$

325) „ $= \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg}\frac{x\pi}{2}}$ $\qquad f(0) = \frac{\pi^2}{2}$

Die Form $\infty - \infty$. Wenn in $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{\pi(x)}{\varrho(x)}$ $\psi(a)$ und $\varrho(a)$ gleich Null werden, so ist $f(a) = \infty - \infty$. Man transformirt dann vor der Substitution $x = a$ so, dass statt dieser unbestimmten Form die andere $\frac{0}{0}$ erscheint.

326) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x^3}{x^3 \sin x}$

$f(0) = \infty$

327) „ $= \frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

328) „ $= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{lx}$ $\qquad f(1) = -\frac{1}{2}$

329) „ $= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{l(1-x)}$ $\qquad f(0) = -\frac{1}{2}$

330) „ $= \operatorname{tg} x - \frac{1}{1-\sin x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$

Die Form $0 . \infty$ entsteht, wenn in $f(x) = \varphi(x) . \psi(x)$ für $x = a$ der eine Factor verschwindet, während der zweite unendlich gross wird. Man giebt dann der Function die Form

$$f(a) = \left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0} \text{ oder } = \frac{\infty}{\infty},$$

je nachdem $\varphi(a) = 0$, $\psi(a) = \infty$ ist, oder umgekehrt.

331) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1} \cdot l a^x$ $\qquad f(0) = l a$

332) „ $= x \cdot l \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $\qquad f(\infty) = 1$

333) „ $= (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ $\qquad f(1) = \frac{2}{\pi}$

334) „ $= \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{cotg}(x - a)$

$f(a) = \frac{1}{a}$

335) „ $= (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Weitere unbestimmte Formen. Die Funktion $y = u^v$, worin u und v Funktionen von x sind, lässt sich auch so schreiben: $l y = v \cdot l u$, oder $y = e^{v \cdot l u}$. Wird nun für $x = a$

1) $u = 0$ und $v = 0$, so ist $y = 0^0$,
2) $u = \infty$ „ $v = 0$, „ „ $y = \infty^0$,
3) $u = 1$ „ $v = \infty$, „ „ $y = 1^\infty$.

Wenn endlich $y = \sqrt[v]{u}$ ist, so ist auch $l y = \frac{1}{v} \cdot l u$, oder $y = e^{\frac{1}{v} \cdot l u}$.

Wird dann für $x = a$

4) $u = 1$ und $v = 0$, so ist $y = \sqrt[0]{1}$,
5) $u = 0$ „ $v = \infty$, „ „ $y = \sqrt[\infty]{0}$,
6) $u = \infty$ „ $v = \infty$, „ „ $y = \sqrt[\infty]{\infty}$,

In allen diesen Fällen nimmt der Exponent von e die Form $0 \cdot \infty$ an.

336) $f(x) = x^x$ $\qquad f(0) = 1$

337) „ $= x^{\frac{1}{x}}$ $\qquad f(\infty) = 1$

338) „ $= (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

339) „ $= (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Anmerkung. Wenn, wie es vorkommt, die unbestimmte Form irgend eines Ausdrucks durch Differentiation nicht beseitigt werden kann, so nimmt man in der Regel dazu die Reihenentwicklung zu Hülfe.

§. 10. Maxima und Minima der Funktionen.

Explicite Funtionen. Lässt man in $y = f(x)$ die unabhängige Variabele x von einem bestimmten Werthe an stetig wachsen, so zeigt das Verhalten von y gewisse Eigenthümlichkeiten, die wieder am leichtesten an der Funktionscurve zu übersehen sind. Man sagt, eine Curve habe eine bestimmte Strecke weit die Art ihrer Krümmung nicht geändert, wenn Jemand, indem er dieser Strecke entlang geht, die convexe Seite fortwährend rechts, die concave fortwährend links behält, oder umgekehrt. Vertauschen dagegen Convexität und Concavität ihre Lage, so wird der Punkt, in welchem dieser Wechsel vor sich geht, Wende- oder Inflexionspunkt genannt.

Eine Funktion kann nun so beschaffen sein, dass mit wachsendem x der Werth von y entweder beständig zu- oder beständig abnimmt, die Funktionscurve wird dann ohne Aufhören auf- oder abwärts steigen. Behält dieselbe dann auch die Art ihrer Krümmung unverändert bei, so bleibt die Funktion von der Betrachtung vor der Hand ausgeschlossen. Wenn dagegen y bei stetig wachsendem x ebenfalls stetig zunimmt, jedoch nur bis zu einem bestimmten Werthe $x = a$, und wenn dann y bei noch grösser werdendem x wieder kleiner wird, so nennt man diesen besonderen Werth $y = f(a)$ ein Maximum der Funktion. Der Verlauf der Funktionscurve in der Umgebung eines Maximalpunktes M ist schematisch durch Fig. 3a veranschaulicht. Da hiernach der vorangehende und der nachfolgende Funktionswerth kleiner sein muss, als der Maximalwerth, so ist

$$f(a) = \text{Max., wenn } f(a) > f(a - \delta) \text{ und } f(a) > f(a + \delta).$$

Umgekehrt nennen wir den Werth $f(a)$ ein Minimum der Funktion, wenn derselbe kleiner ist, als der unmittelbar vorhergehende und nachfolgende, x stetig wachsend vorausgesetzt. Hiernach ist

$$f(a) = \text{Min., wenn } f(a) < f(a - \delta) \text{ und } f(a) < f(a + \delta).$$

Den Verlauf des entsprechenden Theiles der Funktionscurve zeigt Fig. 4a. Endlich sehen wir in Fig. 5a und 6a zwei Formen

Fig. 3 a.

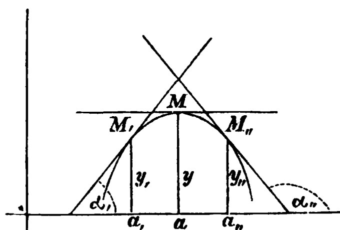


Fig. 4 a.

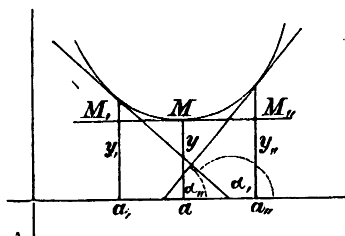


Fig. 3 b.

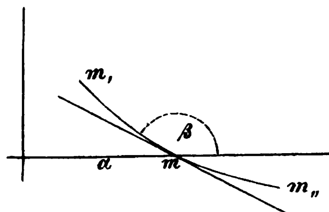


Fig. 4 b.

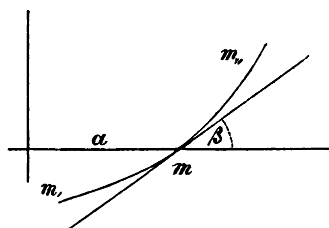


Fig. 5 a.

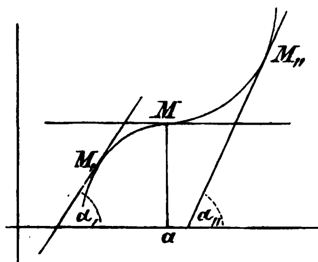


Fig. 6 a.

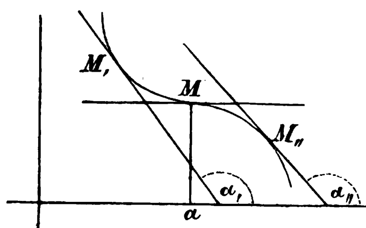


Fig. 5 b.

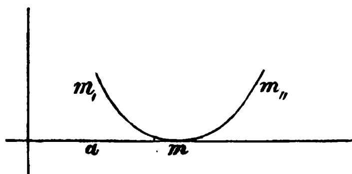
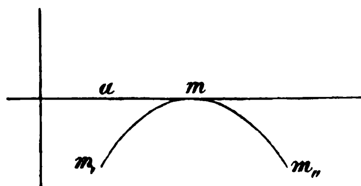


Fig. 6 b.



der Funktionscurve, welche aus Theilen der vorhergehenden zusammen gesetzt sind. In 5a entwickelt sich dieselbe von $M,$ an so, als ob M ein Maximalpunkt werden solle, verläuft aber von da ab in einer Weise weiter, als ob M ein Minimalpunkt gewesen wäre. Dagegen zeigt uns Fig. 6a diese Verhältnisse genau umgekehrt, indem der erste Theil der Minimal-, der zweite Theil der Maximalform entspricht. Die Punkte M in 5a und 6a sind Wendepunkte.

Zur Beantwortung der Frage, wie ein Werth $x = a$ zu finden sei, für welchen $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum ist, dient uns die Tangente an die Funktionscurve, von der wir bereits wissen, dass $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$ ist, wenn a die Abscisse ihres Berührungspunktes und α ihren Richtungswinkel bedeuten. Wir übersehen nun leicht, dass in Fig. 3a die Tangente durch irgend einen Punkt des aufsteigenden Theiles M, M so gerichtet sein muss, dass ihr Richtungswinkel $\alpha, < 90^0$ ist, d. h. dass auf der Strecke $a,$ bis a der Werth $\operatorname{tg} \alpha,$ oder $f'(a - \delta)$ positiv sein muss. Sobald aber der Maximalpunkt M überschritten ist, hat die Tangente durch Punkte des niedersteigenden Astes $M M,,$ im Allgemeinen die Richtung wie in $M,,$, d. h. der Richtungswinkel $\alpha,,$ ist ein stumpfer, und es muss mithin für die Strecke a bis $a,,$ der Werth $\operatorname{tg} \alpha,,$ oder $f'(a + \delta)$ negativ sein. Der stetige Uebergang von $f'(a - \delta) > 0$ in $f'(a + \delta) < 0$ vollzieht sich aber in der Weise, dass $f'(a) = 0$ ist, indem im Maximalpunkt M die Tangente parallel zur x-Achse liegt. Als charakteristisches Kennzeichen dafür, dass $f(a)$ ein Maximum ist, haben wir hiernach die Eigenschaft von a zu verzeichnen, dass $f'(a) = 0$ sein muss.

Für den Minimalpunkt M in Fig. 4a finden wir eine genaue Wiederholung der eben dargestellten Verhältnisse, jedoch in umgekehrter Folge. Hier ist nämlich auf der Strecke M, M der Richtungswinkel der Tangente ein stumpfer und auf der Strecke $M M,,$ ein spitzer, oder es ist $\operatorname{tg} \alpha,$, oder $f'(a - \delta)$, negativ, dagegen $\operatorname{tg} \alpha,,$, oder $f'(a + \delta)$, positiv. Der Uebergang von $f'(a - \delta) < 0$ in $f'(a + \delta) > 0$ geht abermals in dem Minimal-

punkt M vor sich, für welchen $f'(a) = 0$ ist. Auch in dem Minimalpunkte ist die Tangente zur x-Achse parallel.

Durch die Figuren 5a und 6a soll die weitere Thatsache veranschaulicht werden, dass auch in den Wendepunkten M die Tangenten parallel zur der x-Achse liegen, mithin abermals $f'(a) = 0$ sein muss. Von den Maximal- und Minimalpunkten unterscheiden sich dieselben jedoch dadurch, dass in den Wendepunkten die Tangenten auch den Sinn ihrer Drehung wechseln.

Nach den bisherigen Erörterungen besitzen die Maximal-, Minimal- und Wendepunkte die gemeinsame charakteristische Eigenschaft, dass die durch sie gelegten Tangenten parallel zur x-Achse sind, mithin $f'(a) = 0$ ist. Wir sehen uns daher jetzt nach weiteren Merkmalen um, durch welche sie selbst wieder von einander unterschieden werden können. Zu diesem Zweck construiren wir zu $u = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ die der Strecke $M_, M M_{,,}$ entsprechende Funktionscurve, über deren Verlauf wir uns auf folgende Weise orientiren. In $M_,$ (Fig. 3a) ist $\alpha_, < 90^0$, mithin $\operatorname{tg} \alpha_, > 0$; von $M_,$ bis M nimmt $\alpha_,$ und mit ihm zugleich auch $\operatorname{tg} \alpha_,$ stetig ab, bis in M selbst $\operatorname{tg} \alpha = 0$ geworden ist; von M bis $M_{,,}$ ist $\alpha_{,,} > 90^0$, oder $\operatorname{tg} \alpha_{,,} < 0$, aber in stetiger Zunahme. Hiernach sind wir berechtigt, $m_, m m_{,,}$ (Fig. 3b) als eine schematische Darstellung der gesuchten Strecke der Funktionscurve $u = f'(x)$ anzusehen. Wird nun durch m eine Tangente gelegt, so ist deren Richtungswinkel β grösser als 90^0 und $\operatorname{tg} \beta < 0$. Für diesen Punkt m ist $x = a$ und daher $\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = f''(a)$. Für einen Maximalpunkt besteht mithin die weitere Bedingung, dass $f''(a) < 0$ muss. Aehnliche Betrachtungen ergeben das Resultat, dass $\operatorname{tg} \alpha_,$ in Punkt $M_,$ (Fig. 4a) negativ ist und stetig kleiner wird, wenn der Berührungspunkt die Strecke $M_, M$ durchläuft, dass in M selbst $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ist und dass auf der Strecke $M M_{,,}$ $\operatorname{tg} \alpha_{,,}$ positiv sein und stetig zunehmen muss. Wir sind hiernach berechtigt $m_, m m_{,,}$ (Fig. 4b) als denjenigen Theil der Funktionscurve $u = f'(x)$ anzusehen, welcher der Strecke $M_, M M_{,,}$ (Fig. 4a) entspricht.

Es muss mithin jetzt $\beta < 90^0$ und $\operatorname{tg}\beta > 0$ sein, und da wieder für Punkt m $x = a$ ist, so ist $\operatorname{tg}\beta = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = f''(a)$, oder es ist $f''(a) > 0$. Ein Werth $x = a$, der die Funktion zu einem Minimum macht, besitzt hiernach die unterscheidende Eigenschaft, dass $f''(a) > 0$ ist.

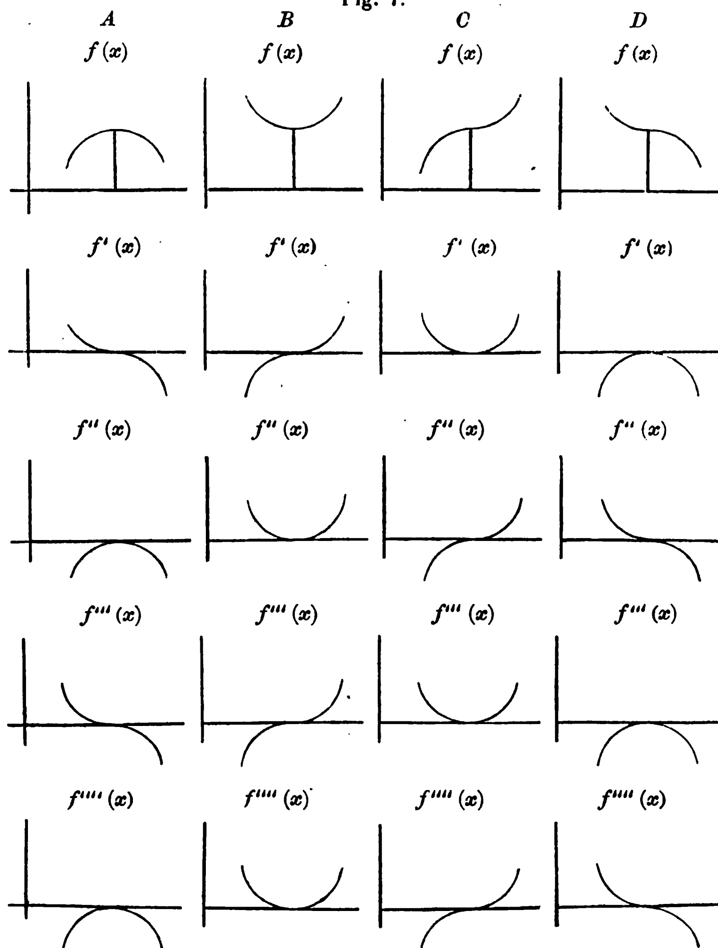
Bezüglich der Wendepunkte haben wir uns die Verhältnisse so zu denken: An einer Maximal- oder Minimalstelle besitzt die Curve 2 auf einander folgende Punkte, welche gleich weit von der x-Achse abstehen und deren Verbindung ein Curvenelement bildet, das verlängert zu der durch M gelegten Tangente wird. Dagegen finden wir an einer Wendestelle 3 auf einander folgende Punkte in gleicher Entfernung von der x-Achse, oder 2 auf einander folgende Elemente in gerader Linie, d. h. 2 zusammen fallende Tangenten parallel zur Achse. Wird nun die Funktionscurve zu $u = f'(x)$ construirt, so entspricht der Strecke $M_, M M_{,,}$ in 5a die Strecke $m_, m m_{,,}$ in 5b, weil $\alpha_,$ $< 90^0$ ist, bis zu $\alpha = 0$ abnimmt und dann in $\alpha_{,,} > 0$ übergeht, so dass die trigonometrischen Tangenten dieser Winkel, oder die Ordinaten der Curvenpunkte, positiv sein müssen. Da nun in M zwei auf einander folgende Tangenten zusammen fallen, so gibt es auch zwei aufeinanderfolgende Werthe $\operatorname{tg}\alpha = 0$ und auf der Curve $m_, m m_{,,}$ zei auf einander folgende Punkte, welche der x-Achse angehören, oder in anderen Worten: Die x-Achse berührt die Curve $m_, m m_{,,}$. Es muss demnach $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=a} = f''(a) = 0$ sein. Nach den nämlichen Grundsätzen wird auch die Curve 6b aus 6a abgeleitet, nur ist $\alpha > 90^0$. Auch hier ist wieder $f''(a) = 0$. Stellen wir die Resultate nochmals zusammen, so ist

$$f(a) = \text{Max., wenn } f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) < 0,$$
$$f(a) = \text{Min., wenn } f'(a) = 0 \text{ und } f''(a) > 0.$$

Ist dagegen $f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$, so besitzt die Curve in $x = a$ gewöhnlich einen Wendepunkt. Dass dieser Punkt $x = a$ aber auch ein Maximal- oder Minimalpunkt sein kann, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) = 0$ ist, soll jetzt nachgewiesen werden.

Die Bedingungen, unter welchen die Curve 3b aus 3a hervorgegangen ist, schliessen die Möglichkeit nicht aus, dass sie in m einen Wendepunkt besitzt. Dies ist der Fall, wenn β zu 180°, oder $\operatorname{tg}\beta = f''(a) = 0$ wird, 3b erhält dann die Gestalt von 6a. Die zum nächsten Differentialquotienten $v = f''(x)$ gehörige Curve muss, weil aus 6a hervorgehend, die Form von 6b besitzen, mithin in $x = a$ die Achse berühren, oder es muss

Fig. 7.



auch $f'''(a) = 0$ sein. Die Curve $w = f''''(x)$ geht wieder aus 6b auf die nämliche Weise hervor, wie 3b aus 3a entstanden ist, und muss in $x = a$ einen Wendepunkt erhalten, wenn, wie oben, der nächste Differentialquotient für $x = a$ verschwindet, d. h. $f''''(a) = 0$ ist. Hat aber die Curve $w = f'''(x)$ in $x = a$ einen Wendepunkt, so muss auch die nächste Curve $z = f''''(x)$ die Achse in $x = a$ berühren, d. h. es muss auch $f'''''(a) = 0$ sein, u. s. w. In Fig. 7 zeigt uns die Abtheilung A die Funktionscurven von $f(x)$ bis $f''''(x)$ unter der Voraussetzung, dass $f(a)$ ein Maximalwerth und $f'(a) = 0, f''(a) = 0$, $f''''(a) = 0$ u. s. w. sei. Ist dagegen $f(a)$ ein Minimalwerth und zugleich $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, $f'''(a) = 0$, u. s. w., so stellt die Abtheilung B die auf einander folgenden Funktionscurven dar. Für den Fall, dass $x = a$ einem Wendepunkt entspricht, und $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ u. s. w. ist, finden wir die Curven der auf einander folgenden Funktionen unter C und D. Die Wendepunkte unter A und B sind dadurch bedingt, dass jedesmal die nächste Funktion für $x = a$ verschwindet, weil nur so die gewöhnliche Tangente, wie in 3b, zu einer Wendetangente werden kann. Verschwindet einmal eine solche Funktion für $x = a$ nicht, so fällt auch der vorhergehende Wendepunkt weg, und wir erhalten die Curven 3b oder 4b wieder. Da aber die erwähnten Funktionen hinsichtlich der Ableitung von gerader Ordnung sind, so sagen wir: Es ist $f(a)$ dann ein Maximum oder Minimum, wenn der erste Differentialquotient, der für $x = a$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist, und zwar ist $f(a)$ ein Maximum, wenn $f^{2n}(a) < 0$, ein Minimum, wenn $f^{2n}(a) > 0$ ist.

1. Beispiel: Für welche Werthe von x wird $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ein Max. oder Min.? $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$ gibt $x = \pm 1$; $f''(x) = \frac{2}{x^3}$. Da nun $f''(1) = 2$, d. h. positiv ist, so muss $f(1) = 2$ ein Min. sein, sowie $f(-1) = -2$ ein Max. ist, weil $f''(-1) = -2$ negativ ist.

2. Beispiel: $f(x) = \sin x + \cos x$; $f'(x) = \cos x - \sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$; $f''(x) = -\sin x - \cos x$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ist ein Max., weil $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ ist ein Min., weil $f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) > 0$. (65)

3. Beispiel: Für welchen Werth von x wird $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ ein Max. oder Min.?

$$f'(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x (la - lx - 1) = 0, \quad \text{oder } lx = l\frac{a}{e}, \quad x = \frac{a}{e};$$

$f''(x) = -\frac{1}{x} f(x) + f'(x)(la - lx - 1)$; $f''\left(\frac{a}{e}\right) = -\frac{e}{a} \cdot e^{\frac{a}{e}}$, d. h. negativ, mithin ist $f\left(\frac{a}{e}\right) = e^{\frac{a}{e}}$ ein Max.

4. Beispiel: Für welche Werthe von x wird:

$f(x) = \sin x \sin(\alpha - x)$ ein Max. oder Min.?

$f'(x) = \sin(\alpha - 2x) = 0$, woraus $\alpha - 2x = 0$, oder $= \pi$, oder $= 2\pi$; $x = \frac{\alpha}{2}$, oder $= \frac{\alpha - \pi}{2}$, oder $= \frac{\alpha}{2} - \pi$; $f''(x) = -2\cos(\alpha - 2x)$. Nun ist $f''\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2$, also $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\frac{\alpha}{2}$ ein Max., $f''\left(\frac{\alpha - \pi}{2}\right) = 2$, mithin $f\left(\frac{\alpha - \pi}{2}\right) = -\cos^2\frac{\alpha}{2}$ ein Min. Der dritte Werth ist dem ersten gleich.

5. Beispiel: Für welche Werthe von x wird $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$ ein Max. oder Min.?

$$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = 0, \text{ oder } \operatorname{tg}^3 x = 1, \; x = \frac{\pi}{4}.$$

Wenn $f'(x) = \frac{u}{v}$ ist, so ist $f''(x) = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$.

Da nun für den in Betracht kommenden Werth von x der Zähler verschwindet, so reducirt sich der Werth auf $f''(x) = \frac{u'}{v}$.

In unserem Beispiele wird dieser Werth negativ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{2}$ ein Max.

Aufgaben.

Zu den nachfolgenden Aufgaben sind als Lösungen nur die Werthe von x angegeben, für welche die Funktion ihre Maximal- und Minimalwerthe annimmt, diese selbst können durch Substitution leicht gebildet werden.

340) $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2 x$ Mx. für $x = \frac{a}{3}$, Mn. für $x = a$

341) „ $= x^3 + 6x^2 - 15x$ Mx. „ $x = -5$, Mn. „ $x = 1$

342) „ $= x^2(1 - x)$ Mx. „ $x = \frac{2}{3}$, Mn. „ $x = 0$

343) „ $= x^2(a - x)^2$ Mx. „ $x = \frac{a}{2}$, Mn. „ $x = a$
Mn. „ $x = 0$

344) „ $= \frac{x}{x^2 + 1}$ Mx. „ $x = 1$, Mn. „ $= -1$

345) „ $= x + \frac{a^2}{x}$ Mx. „ $x = -a$, Mn. „ $x = a$

346) „ $= \frac{a^3}{x^2} + \frac{1}{(1 - x)^2}$ Mn. „ $x = \frac{a}{a + 1}$; $a > 1$

347) „ $= \frac{x}{x^2 + 2x + 4}$ Mx. „ $x = 2$
Mn. „ $x = -2$

348) „ $= \frac{x}{ax^2 - bx + c}$ Mx. „ $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$
Mn. „ $x = -\sqrt{\frac{c}{a}}$

349) „ $= \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ Mx. „ $x = -\sqrt{2}$
Mn. „ $x = \sqrt{2}$

350) „ $= \pm\sqrt{2ax - x^2}$ Mx. „ $x = a$, Mn. für $x = a$

351) „ $= \sqrt{2ax^2(2a - x)}$ Mx. „ $x = \frac{4a}{3}$, Mn. „ $x = 0$

352) „ $= x + \sqrt{1 - x}$ Mx. „ $x = \frac{3}{4}$

353) „ $= x\sqrt{2 - x^2}$ Mx. „ $x = 1$, Mn. „ $x = -1$

354) „ $= x\sqrt{ax - x^2}$ Mx. „ $x = \frac{3a}{4}$

355) $f(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$ Mx. für $x = \frac{a}{2}$

356) „ $= e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$ Mn. „ $x = 0$

357) „ $= \frac{x^2}{e^x}$ Mx. „ $x = 2$, Mn. $f.\ x = 0$

358) „ $= \frac{a^x}{x}$ Mn. „ $x = \frac{1}{l\,a}$

359) „ $= x\,e^{\frac{1}{x}}$ Mn. „ $x = 1$

360) „ $= e^{2x} - e^x$ Mn. „ $x = l\,\frac{1}{2}$

361) „ $= x^x$ Mn. „ $x = \frac{1}{e}$

362) „ $= x^{\frac{1}{x}}$ Mx. „ $x = e$

363) „ $= \frac{x}{l\,x}$ Mn. „ $x = e$

364) „ $= x^{1 - l x}$ Mx. „ $x = \sqrt{e}$

365) „ $= 2 \sin x + \sin 2x$ Mx. „ $x = \frac{\pi}{3}$

366) „ $= \sin 2x + 2 \sin (\alpha - x)$ Mx. „ $x = \frac{\alpha}{3}$, Mn. für $x = -\alpha$

367) „ $= \frac{\cos^2 x}{a^2} + \frac{\sin^2 x}{b^2}$, $a > b$ Mx. „ $x = \frac{\pi}{2}$, Mn. „ $x = 0$

368) „ $= \cos x + \cos (\alpha - x)$, $\alpha < \pi$
Mx. „ $x = \frac{\alpha}{2}$

369) „ $= \sin x \,.\, \sin (\alpha + x)$ Mx. „ $x = \frac{\pi - \alpha}{2}$,
Mn. für $x = \pi - \frac{\alpha}{2}$

370) „ $= \sin x \,.\, \cos (\alpha - x)$ Mx. „ $x = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$,
Mn. für $x = \frac{\alpha}{2} + \frac{3\pi}{4}$

371) „ $e^x . \cos x$ Mx. „ $x = \frac{\pi}{4}$, Mn. für $x = \frac{5\pi}{4}$

372) „ $\frac{e^x}{\sin x}$ Mn. „ $x = \frac{\pi}{4}$, Mx. „ $x = \frac{5\pi}{4}$

Implicite Funktionen. Soll aus der Gleichung $f(xy) = 0$ ein Maximal- oder Minimalwerth für y hervorgehen, so muss die

unabhängige Variabele x so gewählt werden, dass die Bedingung befriedigt ist: $\frac{dy}{dx} = 0$. Da nun $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, so geht diese in die andere Bedingung über: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Im Allgemeinen werden in dieser Gleichung die beiden Variabelen enthalten sein, in Verbindung mit $f(xy) = 0$ gebracht, gehen die gesuchten Werthe von x und die zugehörigen Werthe von y daraus hervor. Wenn für ein solches zusammengehöriges Werthpaar x und y nicht nur $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, sondern zugleich auch $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, so ist $\frac{dy}{dx}$ nicht mehr gleich Null, sondern unbestimmt, ein Fall, der später eigehend behandelt werden wird. Hier setzen wir voraus, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwinde. Unter den angeführten Umständen reducirt sich der zweite Differentialquotient auf den Ausdruck $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y}$, welcher im Falle des Maximums negativ, im Falle des Minimums positiv sein muss.

Beispiel: $f = y^2 + 2x^2 y + 4x - 3 = 0$;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2x^2;$$

Die beiden Gleichungen ergeben die Lösungen: $x = 1$, $y = -1$ und $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$. Da für das erste Werthpaar auch $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, so ist y weder Maximum, noch Minimum. Dagegen wird für das zweite Werthpaar $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{16}{9}$, mithin ist $y = 2$ ein Maximum.

Aufgaben.

373) $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Für $x = 0$ wird $y = b$ ein Max., $y = -b$ ein Min.

374) $f = (x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0$.

Für $x=0$ wird $y=0$ weder Max., noch Min., für $x=\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ wird $y=\frac{a}{4}\sqrt{2}$ ein Max. und $y=-\frac{a}{4}\sqrt{2}$ ein Mn.

375) $f=x^3-3a^2x+y^3=0$;
$x=a$ gibt $y=a\sqrt[3]{2}$ als Max. und $x=-a$ gibt $y=-a\sqrt[3]{2}$ als Min.

376) $f=4x^2-20x-8y+41=0$;
$x=\frac{5}{2}$ macht $y=2$ zu einem Mn.

378) $f=(y-x)^3+x+6=0$
$x=-6-\frac{1}{3\sqrt{3}}$ macht $y=-6+\frac{2}{3\sqrt{3}}$ zu einem Max.,
$x=-6+\frac{1}{3\sqrt{3}}$ macht $y=-6-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ zu einem Min.

379) $f=y^2-ay-\sin x=0$;
$x=\frac{\pi}{2}$ macht $y=\sqrt{a^2+4}$ zu einem Min.

Relative Maxima und Minima. Gegeben ist die Funktion $z=f(xy)$ und weiter zwischen x und y die Gleichung $\varphi(xy)=0$. Es sollen nun x und y so bestimmt werden, dass sie der Gleichung $\varphi(xy)=0$ genügen und zugleich z zu einem Maximum oder Minimum machen.

Beispiel: In einem Kreise ist das an Fläche grösste Rechteck zu zeichnen. Sind xy die Coordinaten des gesuchten Eckpunktes, so ist $z=4xy$ der Werth, welcher ein Max. werden soll, und zugleich müssen x und y die Bedingung befriedigen: $\varphi(xy)=x^2+y^2-r^2=0$, weil der Punkt zur Kreislinie gehört. Hier kann leicht $y=\sqrt{r^2-x^2}$ aus der Gleichung $\varphi=0$ genommen und in $z=4xy$ substituirt werden, man findet dann, dass $z=4x\sqrt{r^2-x^2}$ für $x=r\sqrt{\frac{1}{2}}$ ein Maximum wird.

In vielen Fällen ist jedoch diese Substitution äusserst schwierig, wenn nicht ganz unmöglich, so dass die Aufgabe auf andere Weise gelöst werden muss. Da y durch die Gleichung $\varphi=0$ von x abhängt, so muss x als die einzige unabhängige Variabele ange-

sehen werden, und es müssen die Werthe von x, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen, der Bedingnng $\frac{dz}{dx} = 0$ genügen, oder es muss sein:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \qquad (A)$$

Aus der Gleichung $\varphi = 0$ ergibt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \qquad (B)$$

und durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus A und B entsteht

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = 0,$$

$$\text{oder:} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \qquad (C)$$

Aus C und $\varphi = 0$ findet man jetzt die Werthe für x und y, durch welche z ein Maximum oder Minimum wird, und die weitere Frage, ob Maximum oder Minimum, wird wieder durch das Vorzeichen von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ entschieden, welcher Ausdruck noch zu bilden ist.

Dieses Verfahren lässt übrigens folgende Abänderung zu. Die Bedingung C kann auch durch die folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \qquad (D)$$

ausgedrückt werden, wenn λ eine willkürliche Constante bedeutet, durch deren Elimination D wieder in C übergeht. Tritt aber die weitere Gleichung $\varphi = 0$ noch hinzu, so haben wir 3 Gleichungen zwischen den 3 Unbekannten x, y und λ. Da nun weiter

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y}$$

ist, so dienen zur Bestimmung von x, y, λ die folgende 3 Gleichungen:

$$\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(xy) = 0. \qquad (29)$$

Es bleibt noch übrig, $\frac{d^2 z}{d x^2}$ abzuleiten. Aus A und B entsteht:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

$$0 = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

Wird letzte Gleichung mit λ multiplicirt und zur vorhergehenden addirt, so erhält man:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial x} + \frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

Berücksichtigt man, dass für die hier in Betracht kommenden Werthe der Ausdruck $\frac{\partial (f + \lambda \varphi)}{\partial y}$ verschwindet, so ergibt sich durch Ausführung der angezeigten Differentiation der folgende Werth:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{\partial^2 (f + \lambda \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (f + \lambda \varphi)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \\ + \left[\frac{\partial^2 (f + \lambda \varphi)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 (f + \lambda \varphi)}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right] \frac{dy}{dx}$$

Wird endlich $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ gesetzt, so geht daraus hervor:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 (f+\lambda\varphi)}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

Da der Nenner dieses Werthes ohne Einfluss auf das Vorzeichen ist, so wird z ein Maximum, wenn der Zähler negativ, ein Minimum, wenn der Zähler positiv ist.

1. Beispiel: Für welche Werthe von x und y wird $z = xy$ ein Max. oder Min., wenn die Bedingungsgleichung gegeben ist: $\varphi = x^3 + y^3 - a x y = 0$. $(f + \lambda \varphi) = xy + \lambda (x^3 + y^3 - a x y)$; $\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial x} = y + \lambda (3x^2 - a y) = 0$; $\frac{\partial (f+\lambda\varphi)}{\partial y} = x + \lambda (3 y^2 - a x) = 0$.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt $x = y$ und dann aus $\varphi = 0$ weiter:

$x = y = \frac{a}{2}$, und endlich $\lambda = -\frac{2}{a}$, $z = \frac{a^2}{4}$; $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} =$
$= 6\lambda x = -6$, $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = 6\lambda y = -6$, $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x \partial y} = 1 -$
$-\lambda a = 3$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 - ay = \frac{a^2}{4}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y^2 - ax = \frac{a^2}{4}$;
$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{9}{8}a^4$, folglich $z = \frac{a^2}{4}$ ein Max.

2. Beispiel: Aus einer Seite a und dem gegenüber liegenden Winkel α soll das an Fläche grösste Dreieck gezeichnet werden. Nennen wir die an der Seite a liegenden Winkel x und y, so ist $F = \frac{a^2 \sin x \sin y}{2 \sin a}$. Da nun ein aus constanten und variabelen Factoren zusammen gesetztes Produkt seinen grössten oder kleinsten Werth annimmt, wenn das Produkt der variabelen Factoren am grössten oder kleinsten wird, so dürfen wir a^2 und $2 \sin \alpha$ unterdrücken und $z = f(xy) = \sin x \sin y$ als diejenige Funktion ansehen, welche durch passende Wahl von x und y zu einem Max. wird. Zugleich besteht die Relation $\varphi = x + y + \alpha - 180^0 = 0$, so dass $(f + \lambda\varphi) = \sin x \sin y + \lambda(x + y + \alpha - 180^0)$, $\frac{\partial (f + \lambda\varphi)}{\partial x} = \cos x \sin y + \lambda = 0$, $\frac{\partial (f + \lambda\varphi)}{\partial y} = \sin x \cos y + \lambda = 0$ ist, woraus leicht $\sin (x - y) = 0$, oder $x - y = 0$, erhalten wird, weil die andere Relation $x - y = 180^0$ hier nicht zulässig ist. Für $y = x$ wird dann weiter $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x^2} = -\sin^2 x$, $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial y^2} = -\sin^2 x$ $\frac{\partial^2 (f + \lambda\varphi)}{\partial x \partial y} = \cos^2 x$, und da $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1$ ist, so wird für $y = x$ der Werth $\frac{d^2 z}{dx^2}$ negativ und die Fläche ein Max. Unter allen möglichen Dreiecken mit gegebener Basis und gegebenem Winkel an der Spitze besitzt das gleichschenkelige die grösste Fläche.

Eine andere Aufgabe, nämlich die: In einen gegebenen Kreisabschnitt das grösste Dreieck zu zeichnen, fällt mit dieser genau zusammen.

Aufgaben.

378) Wie gross muss der Winkel an der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks in gegebenem Kreise gewählt werden, wenn die Fläche des Dreiecks ein Max. werden soll?

Wenn r der Halbmesser des Kreises und x der gesuchte Winkel ist, so ist $F = 4r^2 \sin^3 x \cos x$ und wird Max. für $\cos x = \frac{1}{2}$, oder $x = 60^0$. Im Kreise hat das gleichseitige Dreieck die grösste Fläche.

379) In einem Dreieck ist die Basis $= a$ und der Winkel an der Spitze $= \alpha$ gegeben, wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn sein Umfang ein Max. werden soll?

Sind x und y die beiden anderen Seiten, so ist:

$$f = x + y + a, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha - a^2 = 0.$$

Man findet f als Max. für $x = y$.

380) Die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks ist $= a$. Wie sind seine Katheten x und y zu wählen, damit die Fläche ein Max. wird?

$z = xy, \quad \varphi = x^2 + y^2 - a^2 = 0$; z wird Max. für $y = x$.

381) Die Summe der beiden Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks ist constant, nämlich $x + y = 2s$. Wie sind die Katheten zu wählen, wenn die Hypotenuse z ein Min. werden soll?

$z =$ Min. für $x = y$.

382) Zwischen den Schenkeln eines Winkels α, dessen Scheitel A ist, liegt ein Punkt M, man soll durch M eine Gerade ziehen, welche die Schenkel in B und C schneidet und zwar so, dass Dreieck ABC ein Min. wird.

Wir ziehen durch M zu AC eine Parallele, welche AB in D schneidet. Gegeben: $AD = a$, $MD = b$; gesetzt: $AB = x$, $AC = y$. $F = \frac{1}{2} xy \sin \alpha$, oder $z = xy$; $\varphi = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} - 1 = 0$. $F =$ Min. für $x = 2a$, oder $MB = MC$.

383) In der Basis AB eines Dreiecks ABC ist ein Punkt M gegeben, eine Parallele zu AB soll die Seiten in D und E schneiden. In welcher Entfernung von der Basis muss DE gezogen werden, wenn $\triangle DEM$ ein Max. sein soll?

Wir setzen Basis $AB = b$, Höhe des Dreiecks $ABC = h$, Basis $DE = y$, Höhe des Dreiecks $DME = x$ und haben: $F = \frac{1}{2} xy$, $\varphi = bx + hy - bh = 0$; $F =$ Max. für $x = \frac{1}{2}$ h.

384) Die Grundlinie b und die Höhe h eines Dreiecks sind gegeben, wie ist das Dreieck zu zeichnen, wenn die Summe der beiden anderen Seiten ein Min. werden soll?

Sind x und y die Winkel an der Basis, so ist $z = \frac{h}{\sin x} + \frac{h}{\sin y}$ die Seitensumme, u. $bh = 2F = \frac{b^2 \sin x \sin y}{\sin(x+y)}$, oder $\varphi = \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y - \frac{b}{h} = 0$. Für $x = y$ wird z ein Min.

385) Auf den Seiten AB und BC eines Dreiecks sollen die Punkte D und E so gefunden werden, dass ihre Verbindungslinie DE das Dreieck halbirt und ein Min. wird.

$$BD = x, \quad BE = y, \quad BA = a, \quad BC = b;$$

$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos B$, $\varphi = xy - \frac{ab}{2} = 0$. Man findet $z = x^2 + y^2 - ab \cos B$ als Min., wenn $x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$.

386) Eine Gerade DE und 2 auf der nämlichen Seite gelegene Punkte A und B sind gegeben, man soll in DE einen Punkt C so finden, dass $AC + CB$ ein Min. wird.

Man ziehe AP und BQ senkrecht zu DE; setze $AP = p$, $BQ = q$, $PQ = a$; $\angle ACP = x$, $\angle BCQ = y$, so ist $z = AC + BC = \frac{p}{\sin x} + \frac{q}{\sin y}$, $\varphi = p \operatorname{cotg} x + q \operatorname{cotg} y - a = 0$; z wird Min. für $x = y$.

387) Ein Winkel α mit dem Scheitel A und eine Gerade $BC = a$ sind gegeben. Es soll BC so in den Winkel getragen werden, dass die Endpunkte B und C auf die Schenkel des Winkels fallen und das Dreieck ABC ein Max. wird.

$F = \frac{1}{2} xy \sin\alpha, \quad \varphi = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - a^2 = 0.$
$F =$ Max. für $x = y$. Hierbei ist $AB = x$, $AC = y$.

388) Gegeben ist ein rechter Winkel mit dem Scheitel A und auf dem einen Schenkel die Punkte B und C. Man soll auf dem anderen Schenkel einen Punkt D so finden, dass Winkel $BDC = v$ möglichst gross wird.

$AB = a, \quad AC = b, \quad AD = x, \quad \angle ABD = \alpha,$
$\angle ACD = \beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x}{b}; \quad \operatorname{tg} v = \frac{(b-a)x}{ab + x^2}$
wird mit v selbst Max. für $x = \pm\sqrt{ab}$.

389) Welches von allen Vierecken, die aus den 4 gegebenen Seiten a, b, c, d construirt werden können, hat die grösste Fläche?

Ist x der von a und b, y der von c und d eingeschlossene Winkel, so ist $2F = ab\sin x + cd\sin y$.

Durch die Diagonale wird die Relation vermittelt:
$\varphi = 2ab\cos x - 2cd\cos y - a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Man findet, dass für $\sin(x+y) = 0$, d. h. $x + y = 180^0$ F ein Max. wird.

390) In eine Ellipse soll das grösste Rechteck gezeichnet werden.

Gl. der El.: $x = a\cos t, \quad y = b\sin t;$
$F = 4xy = 2ab\sin 2t =$ Max. für $t = 45^0$, oder:
$x = a\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = b\sqrt{\frac{1}{2}}.$

391) Wie ist der Halbmesser eines Kreises zu wählen, wenn ein Ausschnitt von gegebenem Umfang $= 2a$ die grösste Fläche besitzen soll?

Ist der Halbmesser $= x$ und der Bogen $= 2y$, so ist
$x + y = a$ und $F = xy$ ein Max. für $x = \frac{a}{2}$.

392) Ein Parabelsegment wird durch eine zur x-Achse senkrechte Sehne BC begrenzt, deren Abstand vom Scheitel A gleich a ist. Eine zweite Sehne MN soll parallel zu AB so gezogen werden, dass ein Rechteck, dessen eine Seite MN ist und dessen andere Seite in BC liegt, die grösste Fläche besitzt.

Ist xy der gesuchte Punkt M, so ist $F = y(a - x)$ und $y^2 = 2px$; $F =$ Max. für $x = \frac{a}{3}$.

393) Die vorhergehende Aufgabe, nur soll der Umfang des Rechtecks ein Min. werden.

$\frac{1}{2} U = 2y + a - x$; $y^2 = 2px$. Man findet $U =$ Min. für $y = 2p$.

394) Zwei Tangenten eines Kreises bilden einen Winkel $= 2\alpha$, wie ist eine dritte Tangente zu legen, wenn das dem Kreise umschriebene Tangentendreieck ein Min. werden soll?

Die Winkel, welche die dritte Tangente mit den gegebenen bildet, mögen $2x$ und $2y$ sein; dann ist:

$$F = r^2(\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y + \operatorname{cotg} \alpha) \text{ und}$$

$\varphi = x + y + \alpha - 180^\circ = 0$. F wird Min. für $x = y$.

395) In einem Kreise ist eine Sehne AB gegeben und es soll im kleineren Abschnitt zu ihr parallel eine zweite Sehne CD so gezogen werden, dass das Paralleltrapez $ABCD$ ein Max. wird.

Es sei M der Mittelpunkt, MH der zu AB senkrechte Halbmesser, $\angle AMH = \alpha$, $\angle CMH = x$. so ist $F = r^2(\sin x + \sin \alpha)(\cos x - \cos \alpha)$ und wird Max. für $x = \frac{\alpha}{3}$.

396) Es soll bewiesen werden, dass der Kreis als dasjenige Vieleck angesehen werden kann, welches bei constantem Umfange $= P$ die grösste Fläche besitzt.

Ist x die Seitenzahl und P der Umfang eines Vielecks, so wird dessen Fläche $F = \frac{P^2}{4x} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{x}$ ein Max., wenn $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{2\pi}{x}$, d. h. $x = \infty$ ist.

397) Ein gerader Kreiskegel, dessen Spitze A und Basisdurchmesser BC heisst, soll durch eine zu AC parallele Ebene so geschnitten werden, dass der Inhalt der entstehenden Parabelfläche ein Max. ist.

Es sei S der auf AB gelegene Scheitel, SD die zu AC

parallele Achse der Parabel, mithin D ein Punkt von BC. Es sei ferner $SD = x$ und die zu x gehörige Ordinate $= y$, so ist $F = \frac{2}{3} xy$ und $y^2 = BD.\ DC = DC(2r - DC)$. Ist noch $AB = s$, so ist schliesslich $y = \frac{2r}{s}\sqrt{sx - x^2}$ und F wird Max. für $x = \frac{3}{4} s$ oder $AS = \frac{1}{4} AB$.

398) Um ein Rechteck soll die an Fläche kleinste Ellipse beschrieben werden.

a und b die halben Rechtecksseiten, x und y die Halbachsen. $F = xy\pi$ und $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0$. Es wird $F =$ Min. für $x = a\sqrt{2}$, $y = b\sqrt{2}$.

399) Um ein gleichschenkeliges Dreieck soll die an Fläche kleinste Ellipse gezeichnet werden.

Spitze des Dreiecks A, Basis $BC = 2n$, Höhe $= h$. Sind u und v die Halbachsen, so heisst die Scheitelgleichung der Ellipse: $u^2 y^2 = v^2(2ux - x^2)$ und so besteht die Relation: $u^2 n^2 = v^2(2uh - h^2)$. Die Fläche $F = uv\pi$ wird ein Min. für $u = \frac{2}{3} h$.

400) In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Ellipse so gezeichnet werden, dass sie die Seiten des Dreiecks berührt und an Fläche ein Max. wird.

$AB = 2n$ die Basis, C Spitze, $DC = h$ Höhe und zugleich xAchse, AB yAchse. u und v Halbachsen. Nun ist $u^2 y^2 = v^2(2ux - x^2)$ die Scheitelgl. der Ellipse und $y = -\frac{n}{h}x + n$ die Gleichung von AC. Suchen wir die Abscissen der Schnittpunkte zwischen der El. und AC und setzen den Wurzeltheil gleich Null, so ist dies die Bedingung dafür, dass die Gerade die Curve berührt. Sie heisst: $v^2 + \frac{2n^2 u}{h} - n^2 = 0$; $F = uv\pi$ wird Max. für $u = \frac{h}{3}$.

401) In ein gleichschenkeliges Dreieck soll eine Parabel so gezeichnet werden, dass sie die beiden gleichen Seiten be-

rührt und das von der Basis begrenzte Parabelsegment ein Max. wird.

Es sei A die Spitze, h die Höhe, $BC = 2n$ die Basis des Dreiecks, A der Anfangspunkt und h die x Achse des Systems, S der Parabelscheitel, $AS = u$. Die Parabelgleichung heisst: $y^2 = 2p(x-u)$, die Gleichung von AB: $y = \frac{n}{h}x = kx$. Als Bedingung dafür, dass AB die Curve berührt, wird gefunden: $p - 2k^2u = 0$, worin auch p noch unbekannt ist. Die Fläche $F = \frac{4}{3}\sqrt{2p(h-u)^3}$ wird ein Max, für $u = \frac{h}{4}$.

402) Ein Kreis ist durch seine Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ bestimmt. Anfangspunkt und x Achse des Systems sind zugleich Scheitel und Achse einer Parabel, welche den Kreis in den Punkten B und C schneidet. Wie muss der Parameter p der Parabel gewählt werden, wenn das von BC begrenzte Segment ein Max. werden soll?

Die Coordinaten von B mögen x und y sein, dann ist $F = \frac{4}{3}xy$, $y^2 = 2px$ und $y^2 = 2rx - x^2$, woraus folgt, dass $F = \frac{8}{3}\sqrt{p(r-p)^3}$ ein Max. wird für $p = \frac{r}{4}$.

403) Welcher von allen geraden Cylindern, deren Oberfläche $= a^2$ ist, besitzt das grösste Volumen?

x = Basishalbmesser, y = Höhe, $V = x^2y\pi$, $\varphi = 2\pi x(x+y) - a^2$; V wird ein Max. für $y = 2x$.

404) Ein Kegel soll parallel zur Basis so geschnitten werden, dass der zwischen der Schnittfläche und der Kegelbasis gelegene Cylinder an Volumen ein Max. ist.

r = Basishalbmesser, h = Höhe des Kegels, x = Basishalbmesser, y = Höhe des Cylinders. $V = x^2y\pi$; $\varphi = hx + ry - hr = 0$. V wird Max. für $x = \frac{2r}{3}$.

405) Welcher von allen geraden Kegeln von gleicher Seitenlänge $= s$ hat den grössten Cubikinhalt?

Das Volumen wird ein Max. wenn der Basishalbmesser $= s\sqrt{\frac{2}{3}}$ ist.

406) Aus einem Kreise, dessen Halbmesser r ist, soll ein Sector so geschnitten werden, dass der übrig bleibende Theil der Kreisfläche, als Kegelmantel verbraucht, einen Kegel bestimmt, dessen Volumen ein Max. ist.

Ist x der Halbmesser der Kegelbasis, so wird V ein Max. für $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$.

407) Eine Pyramide soll parallel zur Basis durchschnitten und die Schnittfläche als Endfläche eines Prismas benutzt werden, dessen congruente Grundfläche in der Basis der Pyramide liegt. Wo ist der Schnitt zu führen, wenn das Volumen des Prismas ein Max. werden soll?

B Grundfl., h Höhe der Pyr.; y Grundfl., x Höhe des Pris. Es ist $y : B = (h - x)^2 : h^2$ und $V = xy$ ein Max. für $x = \frac{h}{3}$.

408) Dieselbe Aufgabe, nur soll statt des Prismas eine zweite Pyramide construirt werden, deren Grundfläche die Schnittfläche ist und deren Spitze in der Basis der gegebenen Pyramide liegt.

409) Dieselbe Aufgabe, nur sollen statt der beiden Pyramiden 2 Kegel gesetzt werden.

410) In der Achse einer Parabel ist ein Punkt B gegeben und man soll senkrecht zur Achse zwischen B und dem Scheitel A eine Sehne CD so ziehen, dass der Kegel, welchen das Dreieck BCD bei seiner Drehung um die Parabelachse erzeugt, möglichst gross wird.

Schneidet CD die Achse in P und ist $AB = a$, $AP = x$, $CP = y$, so ist $y^2 - 2px = 0$ und $V = \frac{y^2 \pi (a - x)}{3}$ ein Max. für $x = \frac{a}{2}$.

411) Eine regelmässige Pyramide mit quadratischer Basis soll so in eine Kugel gezeichnet werden, dass ihre Ecken in der Kugeloberfläche liegen und ihr Volumen ein Max. ist.

Ist x der Abstand der Grundfl. von dem Kugelmittelpunkt und y die halbe Seite dieser quadratischen Grundfl., so ist $V = \frac{4}{3} y^2 (r + x)$ und $x^2 + 2y^2 - r^2 = 0$. Für $x = \frac{r}{3}$ wird V ein Max.

Für welchen Punkt eines Ellipsenquadranten schliessen Durchmesser und Normale den grössten Winkel ein?

Gesuchter Punkt xy, gesuchter Winkel $= \psi$; $\operatorname{tg} \psi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} xy$ wird mit xy ein Max. für $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y = b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

412) Nachzuweisen, dass die Tangente durch den in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Punkt mit den Achsen ein Minimaldreieck einschliesst.

413) Zwei Kugeln liegen ganz auseinander. In welchem Punkte ihrer Centrallinie kann das Max. der beiden Kugelhauben übersehen werden?

414) Ueber der Centrallinie zweier Kugeln ist in irgend einer der hindurch gehenden Ebenen ein Kreis beschrieben. Von welchem Punkte dieses Kreises aus kann die grösste Summe der beiden Kugelhauben übersehen werden?

§. 11. Die Reihen von Taylor und Maclaurin.

Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass Funktionen, wie $(a + x)^n$, e^x, a^x, $l(1 + x)$, $\sin x$, $\cos x$ u. a. m., in Reihen nach ganzen Potenzen von x entwickelt werden können. Tritt in einer solchen Reihe $(x + a)$ an die Stelle von x, so bleibt sie hinsichtlich ihrer Form unverändert und nimmt nur andere Coefficienten an. Mithin ist es gestattet zu schreiben:

$$f(a + x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

woraus dann durch Differentiation weiter hervorgeht:

$$f'(a + x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots\ldots$$
$$f''(a + x) = 1.2 A_2 + 2.3 A_3 x + \ldots\ldots$$
$$f'''(a + x) = 1.2.3 A_3 + \ldots\ldots$$

u. s. w.

In diesen Gleichungen setzt man $x = 0$ und findet:
$f(a) = A_0$, $f'(a) = A_1$, $f''(a) = 1.2\,A_2$, $f'''(a) = 1.2.3\,A_3$ u. s. w., oder:

$$A_0 = f(a),\ A_1 = f'(a),\ A_2 = \frac{f''(a)}{1.2},\ A_3 = \frac{f'''(a)}{1.2.3} \text{ u. s. w.}$$

So erhalten wir schliesslich:

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)\frac{x}{1} + f''(a)\frac{x^2}{1.2} + f'''(a)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \quad (30)$$

Dies ist die Reihe von Taylor. Bezüglich ihrer Zulässigkeit kann hier nur bemerkt werden, dass die Funktionen $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ u. s. w. endlich, eindeutig und von a bis $a + x$ stetig sein und bleiben müssen, wenn auch, wie gewöhnlich, die Anzahl der Glieder unbegrenzt ist. Dass ausserdem für x nur solche Werthe gewählt werden dürfen, für welche die Reihe convergirt, versteht sich von selbst. Das Weitere über diese Frage muss dem Vortrage, oder dem Studium eines ausführlichen Lehrbuches vorbehalten bleiben.

Wird, wenn zulässig, in der Taylor'schen Reihe $a = 0$ gesetzt, so geht sie in die Reihe von Maclaurin über und heisst dann:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1} + f''(0)\frac{x^2}{1.2} + f'''(0)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \quad (31)$$

Aufgaben:

415) Das Binomium. Zu $f(x) = x^n$ gehören die Werthe $f(a) = a^n$, $f'(a) = n\,a^{n-1}$, $f''(a) = n(n-1)\,a^{n-2}$, $f'''(a) = n(n-1)(n-2)\,a^{n-3}$ u. s. w. Nach der Reihe von Taylor erhält man $f(x+a)$ oder:

$$(a+x)^n = a^n + n a^{n-1}\frac{x}{1} + n(n-1)a^{n-2}\frac{x^2}{1.2} + n(n-1)(n-2)\,a^{n-3}\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

416) Die Reihe für $(1+x)^{-n}$ zu finden. $f(x) = x^{-n}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -n$, $f''(1) = n(n+1)$, $f'''(1) = -n(n+1)(n+2)$ u. s. w.

$$(1+x)^{-n} = 1 - n\frac{x}{1} + n(n+1)\frac{x^2}{1.2} - n(n+1)(n+2)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

417) Entwickele den Ausdruck $\sqrt{1+x}$ in eine Reihe.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$ u. s. w.; daher $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f''(1) = -\frac{1}{4}$ u. s. w.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{4} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^3}{6} - \ldots\ldots$$

418) Entwickele die Reihe:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots\ldots$$

419) Wenn $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ist, soll $f(x+2)$ entwickelt werden. Es ist $f(2) = -1$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 6$, $f'''(2) = 6$; $f(x+2) = -1 + 4x + 3x^2 + x^3$.

420) Nach der Formel von Maclaurin soll entwickelt werden:

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} + \frac{b-a}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 + \frac{b-a}{b^4}x^3 + \ldots\ldots$$

421) Die Reihe für a^x. $f(x) = a^x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = la$, $f''(0) = (la)^2$, $f'''(0) = (la)^3$ u. s. w.

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} la + \frac{x}{1.2}(la)^2 + \frac{x^3}{1.2.3}(la)^3 + \ldots\ldots$$

Daraus geht die Reihe für e^x hervor, wenn man e statt a setzt.

422) Die Reihe für $l(1+x)$. $f(x) = lx$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2$, $f''''(1) = -2.3$, $f'''''(1) = 2.3.4$ u. s. w.

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots$$

Wird darin $-x$ statt x gesetzt, so entsteht:

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \ldots\ldots$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right).$$

Durch Substitution von $x = \frac{1}{2z+1}$ geht die vorstehende in folgende Formel über:

$$l(z+1) = lz + 2\left[\frac{1}{(2z+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2z+1)^5} + \ldots\right].$$

423) Nachzuweisen, dass:

$$(1+e^x)^3 = 8 + 12\frac{x}{1} + 24\frac{x^2}{1.2} + 54\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

424) Die Reihe für $\sin(x+a)$. $f(x) = \sin x$, $f(a) = \sin a$, $f'(a) = \cos a$, $f''(a) = -\sin a$ u. s. w.

$$\sin(x+a) = \sin a + \cos a \frac{x}{1} - \sin a \frac{x^2}{1.2} - \cos a \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $a = 0$ wird:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

425) Die Reihe für $\cos(x+a)$. $f(x) = \cos x$, $f(a) = \cos a$, $f'(a) = -\sin a$, $f''(a) = -\cos a$, $f'''(a) = \sin a$ u. s. w.

$$\cos(a+x) = \cos a - \sin a \frac{x}{1} - \cos a \frac{x^2}{1.2} + \sin a \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Für $a = 0$ erhält man:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots$$

426) Auf ähnliche Weise entwickelt man:

$$\operatorname{tg}(a+x) = \operatorname{tg} a + \frac{1}{\cos^2 a} \cdot \frac{x}{1} + \frac{2 \operatorname{tg} a}{\cos^2 a} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{2(1+3\operatorname{tg}^2 a)}{\cos^2 a} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

427) Nach der Formel von Maclaurin soll $f(x) = \cos^2 x$ entwickelt werden.

$$\cos^2 x = 1 - 2\frac{x^2}{1.2} + 8\frac{x^4}{1.2.3.4} - 32\frac{x^6}{1.2\ldots.6} + \ldots$$

428) Mittelst der Reihe von Maclaurin ist die Formel von Moivre abzuleiten. Gegeben ist $f(x) = (\cos x + i \sin x)^n$. Man findet: $f'(x) = n(\cos x + i \sin x)^{n-1}(-\sin x + i \cos x) =$ $= ni(\cos x + i \sin x)^n = ni \,.\, f(x)$, und daraus folgt, dass $f''(x) = ni \,.\, f'(x) = (ni)^2 f(x)$ ist u. s. w. Nun ist $f(0) = 1$, $f'(0) = ni$, $f''(0) = -n^2$, $f'''(0) = -n^3 i$ u. s. w. und:

$$(\cos x + i \sin x)^n = 1 - \frac{n^2 x^2}{1.2} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots +$$
$$+ i\left(\frac{nx}{1} - \frac{n^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots\right).$$

oder nach den für $\sin x$ und $\cos x$ entwickelten Reihen:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx).$$

429) Die Funktion $f(x) = \arcsin x$ soll in eine Reihe entwickelt werden. Weil die höheren Differentialquotienten wenig einfache Formen annehmen, setzen wir:

$$\arcsin x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

und haben sofort $A = 0$ für $x = 0$. Wird auf beiden Seiten differentiirt, so entsteht:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

Für die linke Seite liefert der binomische Satz die Reihe:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

und so erhält man durch Vergleich:

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2.3}, \quad E = 0 \text{ u. s. w., oder:}$$

$$\text{arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Für $x = 1$ wird $\text{arc}\sin x = \frac{\pi}{2}$.

430) Die Reihe für arc tg x. Setzt man:

$$\text{arc tg}\, x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots,$$

so ist für $x = 0$ auch $A = 0$ und:

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \ldots$$

Da nun weiter:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots,$$

so findet man durch Vergleich, dass:

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = -\tfrac{1}{3}, \quad E = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$\text{arc tg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

Für $x = 1$ ist $\text{arc tg}\, x = \frac{\pi}{4}$, und man hat:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} - \ldots\ldots$$

Werden die Glieder paarweise vereinigt, so entsteht die bessere Form:

$$\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\ldots\right).$$

Setzt man $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ und $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{3}$, so ist $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = 1$ und daher $(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$. Man darf mithin setzen:

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \ldots\ldots$$

Zum Schlusse dieses Kapitels stellen wir noch einige später nothwendige Formeln auf. Wird in der Reihe für e^x an die Stelle von x die imaginäre Variabele ix gesetzt, so wird:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2....6} + ...$$
$$+ i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - .....\right),$$

oder es ist $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, und allgemein:

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx) \qquad (32)$$

Da nun auch $e^{inx} = (\cos x + i \sin x)^n$ ist, so erhalten wir leicht durch Vergleich die Formel von Moivre wieder. Aus:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ und } e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt leicht:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad (33)$$

worin auch nx statt x gesetzt werden darf.

Tritt ebenso in Aufgabe Nr. (422) an die Stelle von x die imaginäre Variabele ix, so erhält man:

$$l\,\frac{1 + ix}{1 - ix} = 2i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - .....\right);$$

woraus dann unter Berücksichtigung der Reihe für arc tg x folgt:

$$\text{arc tg}\, x = \frac{1}{2i}\, l\,\frac{1 + ix}{1 - ix}. \qquad (34)$$

Funktionen von zwei unabhängigen Variabelen.

§. 12. Entwickelung der Differentialquotienten.

Sind in der gegebenen Funktion $z = f(xy)$ die beiden Variabelen unabhängig von einander, so können die Werthe, welche z nach einander annimmt, wenn man den Variabelen immer andere und andere Werthe beilegt, auf folgende Weise graphisch veranschaulicht werden:

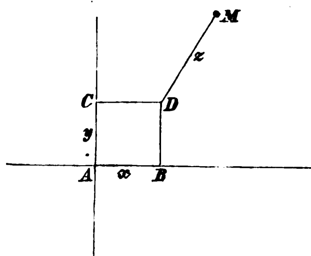


Fig. 8.

In der gewöhnlichen Coordinatenebene benutzt man in bekannter Weise das gewählte x und y zur Construktion eines Punktes D (Fig. 8), errichtet in D ein Perpendikel zur Coordinatenebene und trägt darauf den Werth von z ab, welcher den gewählten Werthen für x und y entspricht. So erhält man den Punkt M im Raume. Bei mehrdeutigen Funktionen findet man mehr als einen Punkt auf der nämlichen Senkrechten. Durch den continuirlichen Zusammenhang aller Punkte, welche auf diese Weise uas einer Funktion hervorgehen, entsteht eine Oberfläche.

Eine Aenderung des Funktionswerthes $z = f(xy)$ kann nun auf dreierlei Weisen veranlasst werden, und zwar:

1) dadurch, dass nur x übergeht in x_1,

2) dadurch, dass nur y übergeht in y_1,

3) dadurch, dass gleichzeitig x und y übergehen in x_1 und y_1.

Demgemäss müssen auch 3 verschiedene Arten von Differenzen der Funktionswerthe unterschieden werden, nämlich:

1) $f(x_1 y) - f(xy)$; 2) $f(xy_1) - f(xy)$; 3) $f(x_1 y_1) - f(xy)$.

Dass man die Werthe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x_1 y) - f(x y)}{x_1 - x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim \frac{f(x y_1) - f(x y)}{y_1 - y}$$

die partiellen Differentialquotienten der Funktion nennt, wurde Pg. 14 erörtert, wo sich auch der Modus ihrer Ableitung angegeben findet. Wir haben uns desshalb hier nur noch mit derjenigen Veränderung dz zu befassen, welche der Funktionswerth z dadurch erfährt, dass sich die beiden Variabelen x und y gleichzeitig um die verschwindend kleinen Werthe dx und dy ändern. Wenn den beliebig aber doch ganz bestimmt gewählten Werthen xy und $x_1 y_1$ die Funktionswerthe z und z_1 zugehören, so ist $(z_1 - z) = f(x_1 y_1) - f(xy)$, oder:

$$(z_1 - z) = \frac{f(x_1 y_1) - f(x y_1)}{(x_1 - x)}(x_1 - x) + \frac{f(x y_1) - f(x y)}{(y_1 - y)}(y_1 - y).$$

Durch den Uebergang zu den Grenzen wird dieser Ausdruck in den folgenden übergeführt:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{35}$$

Wird diese Formel nach ihrer eigenen Anleitung nochmals differentiirt und dabei berücksichtigt, dass dx und dy constante Werthe sind, so entsteht:

$$d^2 z = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right)}{\partial y} dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Aufgaben.

431) $z = 3x^2 + xy^2 + y^4$ — $dz = (6x + y^2) dx + (2xy + 4y^3) dy$

432) $z = \frac{xy}{x+y}$ — „ $= \frac{x^2 dy + y^2 dx}{(x+y)^2}$

433) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ — „ $= \frac{x dx - y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

434) $z = (2x - 5y^2)^3$ — „ $= 3(2x - 5y^2)^2 (2dx - 10y dy)$

435) $z = y \sin x + \cos(x - y)$ — „ $= [y \cos x - \sin(x - y)] dx + [\sin x + \sin(x - y)] dy$

436) $z = (\sin 3x + \cos y)^2$

$$dz = 2(\sin 3x + \cos y)(3\cos 3x\,dx - \sin y\,dy)$$

437) $z = x^2 - axy + y^2$ $\qquad d^2z = 2(dx^2 - a\,dx\,dy + dy^2)$

438) $z = y^2 e^x$ $\qquad d^2z = e^x(y^2dx^2 + 4y\,dx\,dy + 2dy^2)$.

§. 13. Maxima und Minima von Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen.

Wenn auf der Eingangs des vorhergehenden Paragraphen erwähnten Funktionsoberfläche der Punkt M weiter von der xy-Ebene absteht, als alle Punkte seiner unmittelbarsten Umgebung, so nennt man ihn einen Maximalpunkt, liegt er dagegen dieser Ebene näher, als alle benachbarten Punkte, so ist er ein Minimalpunkt. Der zugehörige Funktionswerth z wird dann ein Maximum, beziehungsweise ein Minimum genannt. Werden durch einen solchen Punkt M nach beliebigen Richtungen Ebenen senkrecht zur xy-Ebene gelegt, so entstehen auf der Oberfläche Schnittcurven, und es müssen alle Tangenten, welche durch M an diese Curven gelegt werden können, parallel zur xy-Ebene sein. Legen wir in der Achsenebene beliebige Curven durch den Punkt D, so entsprechen diesen ebenfalls beliebige Funktionen zwischen den Variabelen x und y. Jedem Punkte einer solchen Curve entspricht ein bestimmtes Werthpaar x und y, und diesen wieder ein ganz bestimmtes z, woraus dann folgt, dass jeder Curve in der xy-Ebene eine ganz bestimmte Curve auf der Funktionsoberfläche entsprechen muss. Kann nun ein Werth z so gefunden werden, dass er für alle diese Funktionscurven ein Maximum oder Minimum vorstellt, so ist er auch ein Maximum oder Minimum der Funktion. In §. 10 haben wir Werthe für x und y ermittelt, für welche $z = f(xy)$ ebenfalls zu Maximal- oder Minimalwerthen wurde, doch mussten die gefundenen Werthe noch weiter der Bedingung genügen: $\varphi(xy) = 0$. Daher unterscheidet sich unsere jetzige Aufgabe von der damaligen nur durch den Umstand, dass die erwähnte Bedingung ganz fehlt, d. h., die Abhängigkeit zwischen x und y beliebig gewählt werden darf. Fügen wir desshalb der gegebenen Funktion

$z = f(xy)$ noch die willkürliche $\varphi(xy) = 0$, oder statt ihrer noch die beiden willkürlichen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ hinzu, so ist diese Aufgabe auf die frühere zurückgeführt. Hierdurch ist auch z in eine Funktion der einzigen Variabelen t umgewandelt, und es muss für den Fall eines Maximums oder Minimums:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

sein. Bei der Willkürlichkeit von $\frac{dx}{dt} = x'$ und $\frac{dy}{dt} = y'$ kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (36)$$

Aus diesen Gleichungen gehen diejenigen Werthe von x und y hervor, welche z zu einem Maximum oder Minimum machen. Diese selbst werden, wie gewöhnlich, durch das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten von einander unterschieden. Es ist:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + x' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} y' \right) +$$
$$+ y' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} x' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' \right).$$

Gemäss der Relationen (36) wird:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} x' y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2.$$

Die zweiten Differentialquotienten sind hier constante Grössen, weil sie mit den aus (36) hervorgehenden Werthen von x und y zu bilden sind. Wir nennen sie a, b und c und haben:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a x'^2 + 2 b x' y' + c y'^2 = \frac{(a x' + b y')^2 + (ac - b^2) y'^2}{a}.$$

Der letzte Ausdruck bleibt für alle Werthe von x' und y' positiv, wenn $(ac - b^2) \geqq 0$ und zugleich $a > 0$ ist. Die Funktion ist dann ein Minimum. Ist dagegen $(ac - b^2) \geqq 0$ und $a < 0$, so kann der Ausdruck nur negativ werden, wie man x' und y' auch wählen mag. Die Funktion ist ein Maximum. Ist endlich $(ac - b^2) < 0$, so kann der Werth durch geeignete Wahl von x' und y' nach Belieben positiv oder negativ gemacht werden.

Hiernach ist es für Maximal- und Minimalwerthe ein gemeinsames Erforderniss, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 \geqq 0$ ist, und es ist dann:

$$z \text{ ein Maximum, wenn } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,$$

$$z \text{ ein Minimum, wenn } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0.$$

Aufgaben.

439) $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$ Min. für $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

440) $z = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$ „ „ $x = \frac{27}{2}$, $y = 5$.

441) $z = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ „ „ $x = y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$.

442) $z = (x + y)^2 - (x + 5y + xy)$ „ „ $x = -1$, $y = 3$.

443) $z = xy^2(a - x - y)^3$ Max. für $x = \frac{a}{6}$, $y = \frac{a}{3}$.

444) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ „ „ $x = y = 60^0$.

445) $z = \sin x \sin y \sin(\alpha - x - y)$ „ „ $x = y = \frac{\alpha}{3}$.

446) $z = x^3 - 3axy + y^3$ „ „ $x = y = a$.

447) Das Volumen eines rechtwinkeligen Parallelepipedes ist $= a^3$. Wie gross müssen die Kanten sein, wenn die Oberfläche ein Min. werden soll?

Der Körper ist ein Würfel, dessen Kanten $= a$.

448) Eine Zahl a soll in 3 solche Theile zerlegt werden, dass deren Produkt ein Max. wird.

$z = xy(a - x - y)$ wird Max., wenn jeder Theil $= \frac{a}{3}$ ist.

449) In einen Kreis soll das an Fläche grösste Dreieck gezeichnet werden.

Die zu den Seiten gehörenden Centriwinkel mögen x, y und $(360^0 - x - y)$ heissen, so wird $F = \frac{1}{2} r^2 (\sin x + \sin y + \sin(360^0 - x - y)$ ein Max., wenn die 3 Centriwinkel gleich, mithin auch die Dreiecksseiten gleich sind.

450) Die Summe der 3 Seiten eines Dreiecks ist $= 2s$. Wie muss man die einzelnen Seiten wählen, wenn die Fläche ein Max. sein soll?

$F = \sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$ wird ein Max., wenn die 3 Seiten gleich sind.

451) Aus einer Kugel soll das an Volumen grösste rechtwinkelige Parallelepiped geschnitten werden.

Kugelhalbmesser $= r$, die halben Kanten x, y, u, so besteht die Relation: $x^2 + y^2 + u^2 = r^2$. Das Volumen $z = 8xyu$ wird Max. für $x = y = u = r\sqrt{\frac{1}{3}}$.

§. 14. Homogene Funktionen.

Wir sagen, der Ausdruck ax^2y^3 sei vom fünften Grade (Ordnung, Dimension), weil die Exponentensumme der beiden Variabelen 5 beträgt, und nennen $\frac{a(x^4 + y^2x^2)}{x+y}$ einen Ausdruck dritten Grades, weil die Differenz aus der Exponentensumme des Zählers und Nenners gleich 3 ist. Dass der Grad eines Ausdrucks auch eine negative oder gebrochene Zahl sein kann, ist selbstverständlich. Sind die einzelnen Theile einer Funktion von gleich hohem Grade, so ist die Funktion homogen. Zur sicheren Beurtheilung, ob eine Funktion die erwähnte Eigenschaft besitze, dient das folgende Kriterium: Ersetzt man die Variabelen x, y, z u. s. w. durch die Werthe tx, ty, tz, wobei t einen beliebigen Factor vorstellt, so muss man für eine Funktion vom $n$ten Grade die Relation finden:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(xyz) \qquad (37)$$

1. Beispiel: $f(xy) = 5x^2 - 2xy + 7y^2$;

$$f(tx, ty) = 5t^2x^2 - 2tx\,ty + 7t^2y^2 = t^2 f(xy).$$

2. Beispiel: $f(xyz) = \frac{x^3 z^{\frac{3}{2}} - y^4 x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{5}{2}} z^2}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + z}$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{t^3 x^3 t^{\frac{3}{2}} z^{\frac{3}{2}} - t^4 y^4 t^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} t^2 z^2}{t^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + tz} = t^{\frac{7}{2}} f(xyz).$$

Euler's Lehrsatz über homogene Funktionen. Wir setzen in (37) $tx = u$, $ty = v$, $tz = w$, und differentiiren die beiden Seiten nach t:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}=nt^{n-1}f(xyz),$$

oder, weil $\frac{du}{dt}=x$, $\frac{dv}{dt}=y$, $\frac{dw}{dt}=z$ ist,

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot y+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot z=nt^{n-1}f(xyz).$$

Lässt man darin die willkürliche Grösse t in 1 übergehen, so verwandelt sich $\frac{\partial f}{\partial u}$ in $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ in $\frac{\partial f}{\partial z}$ und man erhält:

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=n\,.\,f(xyz). \qquad (38)$$

Diese Formel stellt den Satz von Euler dar.

1. Beispiel: $f=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$;

$$\frac{2x}{a^2}\cdot x+\frac{2y}{b^2}\cdot-2z\,.\,z=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2\right).$$

2. Beispiel: $f=x^3+2ax^2y-ay^2=0$;

$$(3x^2+4axy)\,x+(2ax^2-3ay^2)\,y=3\,(x^3+2ax^2y-ay^3).$$

3. Beispiel: $f=\sqrt{x^3-y^2z}=R$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2}{2R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2yz}{2R},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-y^2}{2R},$$

$$\frac{3x^3-2y^2z-y^2z}{2R}=\tfrac{3}{2}\left(\frac{x^3-y^2z}{R}\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{x^3-y^2z}.$$

4. Beispiel: $f=\frac{xy}{x^3+y^3}$;

$$x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y^4x+x^4y}{(x^3+y^3)^2}=-\frac{xy}{x^3+y^3}.$$

5. Beispiel: $f=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{z}$;

$$-\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\,.\,x+\tfrac{1}{2}\frac{y^{-\frac{1}{2}}}{z}\cdot y-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{z^2}\cdot z=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{y}}{z}\right).$$

§. 15. Die Reihen von Taylor und Maclaurin für Funktionen mit zwei unabhängigen Variabelen.

Ersetzen wir in $f(xy)$ die Variabele x durch $x+\xi$ und y durch $y+\eta$, so kann die Funktion in eine Reihe nach Potenzen

und Produkten von ξ und η entwickelt werden. Um diese Entwickelung auf §. 11 zurückzuführen, setzen wir $\xi = r \,.\, t$, $\eta = s \,.\, t$ und $f(x + rt,\ y + st) = F(t)$, indem wir uns unter x, y, r, s bestimmt gewählte Werthe vorstellen. Nach dem Maclaurin'schen Satze ist jetzt:

$$F(t) = F(0) + F'(0)\frac{t}{1} + F''(0)\frac{t^2}{1\,.\,2} + F'''(0)\frac{t^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Bei der Bildung der Funktionen F', F'' u. s. w. ist es zweckmässig, $x + rt = u$, $y + st = v$ zu setzen, wodurch $F(t)$ in $f(uv)$ umgewandelt wird. Zugleich ist $\frac{du}{dt} = r$, $\frac{dv}{dt} = s$, und die höheren Differentialquotienten verschwinden. So ist:

$$F(t) = f(uv)$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$F'''(t) = \frac{\partial^3 f}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dt}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\,\partial v}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dv}{dt} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial u\,\partial v^2}\,\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}\left(\frac{dv}{dt}\right)^3$$

u. s. w.

Setzt man $t = 0$, so geht $f(uv)$ in $f(xy)$ über und ebenso verwandelen sich die partiellen Differentialquotienten von f nach u und v in die entsprechenden Funktionen nach x und y. So entstehen die Werthe $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ u. s. w. und es gibt:

$$F(t) = f(xy) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}r + \frac{\partial f}{\partial y}s\right]\frac{t}{1} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}rs + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}s^2\right]\frac{t^2}{1\,.\,2}$$
$$+ \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}r^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}r^2 s + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}rs^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}s^3\right]\frac{t^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

u. s. w.

Werden nun für $F(t)$, rt, st die Werthe wieder gesetzt, die sie vertreten, so ergibt sich:

$$f(x + \xi,\ y + \eta) = f(xy) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\xi + \frac{\partial f}{\partial y}\eta\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\xi^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\xi\eta}{1\,.\,2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\frac{\eta^2}{1\,.\,2}\right] + \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,\frac{\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\,\frac{\xi^2\eta}{1\,.\,2\,.\,3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\,\frac{\xi\eta^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,\frac{\eta^3}{1\,.\,2\,.\,3}\right] \quad (39)$$

u. s. w.

Wird darin $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt, so erhält man die Reihe für $f(\xi\eta)$, welche in die Reihe $f(xy)$ übergeht, wenn ξ mit x und η mit y vertauscht wird.

Aufgaben.

452) Wenn $f(xy) = x^3 + xy^2$ ist, so soll $f(x+\xi,\ y+\eta)$ allgemein entwickelt und dann $\xi = 1$, $\eta = 2$ gesetzt werden.

$$f(x+1,\ y+2) = [x^3+y^2x] + [3x^2+y^2+4xy] + [7x+4y] + 5.$$

453) Gegeben ist $f(xy) = \sin x \cos y$. Es soll $f(x+\delta,\ y+\delta)$ in eine Reihe entwickelt werden.

$$f(x+\delta,\ y+\delta) = \sin x \cos y + \cos(x+y) \cdot \frac{\delta}{1} -$$
$$- 2\sin(x+y)\frac{\delta^2}{1.2} - 4\cos(x+y)\frac{\delta^3}{1.2.3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

454) Es soll die Funktion $a^x l(1+y)$ in eine Reihe entwickelt werden.

Man lässt x in $(x+\xi)$, y in $(y+\eta)$ übergehen, entwickelt die Funktionen nach Potenzen und Produkten von ξ und η, setzt dann in den als Koefficienten auftretenden Differentialquotienten $x = 0$ und $y = 0$ und vertauscht hierauf ξ mit x und η mit y. So erhält man:

$$a^x l(1+y) = y + xy\, la - \tfrac{1}{2}y^2 + \frac{x^2y}{2}(la)^2 - \frac{xy^2}{2} la + \tfrac{1}{3}y^3 + \ldots$$

Integralrechnung.

Unbestimmte Integrale.

§. 1. Die einfachen Integralformeln.

Die Integralrechnung hat zunächst die Aufgabe zu lösen, zu einem gegebenen Differentialquotienten die ursprüngliche Funktion wieder herzustellen, oder allgemeiner, zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ diejenige Funktion $F(x)$ zu finden, deren Differentialquotient $f(x)$ ist. Wir nennen dann F das Integral von f und sagen:

$$\int f(x)\, dx = F(x), \text{ wenn } \frac{d\,[F(x)]}{dx} = f(x)$$

ist. Da nun der Differentialquotient von F unverändert bleibt, wenn eine beliebige Constante C zugefügt wird, so sind zu einer vorgelegten Funktion unzählig viele Integrale möglich, doch können ihre Werthe nur um eine Constante verschieden sein.

Eine Anzahl einfacher Integralformeln wird erhalten, wenn man die in §. 1 zusammengestellten Differentialformeln kurzweg umkehrt und schreibt:

1) $\int a\, dx = ax + C$

2) $\int a x^n\, dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \frac{1}{x}\, dx = lx + C$

4) $\int e^x\, dx = e^x + C$

5) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C$

6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

7) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

8) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$

9) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

10) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,cotg} x + C_1$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$

Sind u und v Funktionen von x, so ist $\frac{d\,(u+v)}{dx} = u' + v'$, und daher muss umgekehrt:

$$\int (u' + v')\,dx = u + v = \int u'\,dx + \int v'\,dx$$

sein, oder: Eine Snmme integrirt man, indem man jeden Theil integrirt.

Ist a constant, so ist $d\,(a\,.\,u) = a\,.\,u'$ und darum auch:

$$\int a\,.\,u'\,dx = a\,.\,u = a\int u'\,dx.$$

Ein constanter Factor unter dem Integralzeichen darf vor dasselbe gestellt werden.

Aufgaben.

Die beliebige Constante ist den Lösungen nicht zugefügt.

12) $\int 7x^4 = \frac{7x^5}{5}$

13) $\int \frac{2}{3x^5} = -\frac{1}{6x^4}$

14) $\int \sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

15) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

16) $\int 5\sqrt[3]{x^2} = 3\sqrt[3]{x^5}$

17) $\int \frac{a}{\sqrt[4]{5x^3}} = 4a\sqrt[4]{\frac{x}{5}}$

18) $\int (a + bx)\, dx = ax + \frac{bx^2}{2}$, oder $= \frac{(a+bx)^2}{2b}$, indem sich beide Werthe nur durch eine Constante unterscheiden.

19) $\int \left(5x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) dx = \frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 3x - 2\, lx - \frac{5}{x}$

20) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}\, dx = \frac{x^6}{6} - \frac{3x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - lx$

21) $\int (3 + 2\sqrt[4]{x})^3\, dx = 27x + \frac{216}{5} x^{\frac{5}{4}} + 24\, x^{\frac{3}{2}} + \frac{32}{7} x^{\frac{7}{4}}$

22) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}\, dx = \frac{1}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{8}{17} \sqrt[12]{125\, x^{17}}$

23) $\int \frac{3 + 5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}\, dx = -\frac{6}{\sqrt{x}} + 30\sqrt[6]{x}$.

Die Methode der Substitution. Sieht man, dass die Funktion unter dem Integralzeichen ein sogenanntes vollständiges Differential, d. h., der Differentialquotient einer einfachen und bekannten Funktion ist, so kann das Integral sofort hingeschrieben werden. Gewöhnlich muss aber diese Form, wenn sie überhaupt möglich ist, erst durch Transformation herbeigeführt werden, indem man $x = \varphi(z)$ setzt und den gegebenen Differentialquotienten nach x in den Differentialquotienten der nämlichen Funktion, aber genommen nach z, umwandelt. Es hat dies auf folgende Weise zu geschehen: Wenn $y = f(z)$ und $z = \varphi(x)$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$, oder $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$. Bei dem Integral $y = \int f(x)\, dx$ ist $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Wird nun $x = \varphi(z)$ gesetzt, so ist $\frac{dy}{dz} = f[\varphi(z)] \cdot \frac{dx}{dz}$ und:

$$y = \int f(x)\, dx = \int f[\varphi(z)] \cdot \frac{dx}{dz}\, dz. \qquad (1)$$

Die Anwendung dieser Formel soll an einigen Beispielen erläutert werden.

24) $y = \int (a + bx)^n\, dx$; $a + bx = z$, $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{b}$;

$$y = \frac{1}{b}\int z^n\,dz = \frac{1}{b}\,\frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)\,b}.$$

25) $y = \int \frac{1}{a+bx}\,dx;\quad a+bx = z;$

$$y = \frac{1}{b}\int \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{b}\,lz = \frac{1}{b}\,l\,(a+bx).$$

26) $y = \int \sqrt{a+bx}\,dx;\quad a+bx = z^2,\quad \frac{dx}{dz} = \frac{2z}{b}$

$$y = \frac{2}{b}\int z^2 dz = \frac{2}{b}\cdot\frac{z^3}{3} = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}.$$

27) $y = \int e^{mx}\,dx;\quad mx = z,\quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{m};$

$$y = \frac{1}{m}\int e^z\,dz = \frac{e^z}{m} = \frac{e^{mx}}{m}.$$

28) $y = \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx;\quad x = az.$ Statt nun zu setzen: $\frac{dx}{dz} = a$, ist es gebräuchlich zu schreiben: $dx = a\,dz$.

$$y = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,z = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}.$$

29) $y = \int \sin ax\,dx;\quad ax = z,\quad dx = \frac{1}{a}\,dz;$

$$y = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{a}\cos z = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

30) $y = \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx;$

$$y = \int \frac{1}{z^2+1}\,dz = \text{arc tg}\,z = \text{arc tg}\,(x+2).$$

Die theilweise Integration. Sind u und v Funktionen von x, so ist $\frac{d\,(u\,.\,v)}{dx} = v\,.\,u' + u\,.\,v'$, und daraus folgt sofort: $\int v\,.\,u'\,dx + \int u\,.\,v'\,dx = u\,.\,v$, wofür man auch setzen kann:

$$\int u\,.\,v'\,dx = u\,.\,v - \int v\,.\,u'\,dx. \qquad (2)$$

Diese Formel hat folgenden Sinn: Soll ein Produkt $u\,.\,v'$, dessen einer Factor v' ein vollständiges Differential ist, integrirt werden, so integrirt man zunächst nur diesen Factor v' und bildet aus dem Integral v und dem unveränderten zweiten Factor u

das Produkt $u\,.\,v$; dann wird u differentiirt, das Produkt $u'.\,v$ gebildet und $\int v\,.\,u'\,dx$ von $u\,.\,v$ abgezogen. Durch dieses Verfahren wird nur ein Theil des ganzen Integrales fertig erhalten, während der andere Theil sich noch unter dem Integralzeichen befindet. Ist dieses übrig gebliebene Integral $\int v\,.\,u'\,dx$ aber einfacher als das gegebene, so ist die Methode zweckmässig; besonders ist sie dies dann, wenn durch wiederholte Anwendung das zurückbleibende Integral immer einfacher und schliesslich auch in ausführbarer Form erhalten wird.

Geht u in eine Constante a über, so ensteht:

$$\int a\,.\,v'\,dx = a\,.\,v = a\int v'\,dx.$$

Wir lassen zunächst zu (2) einige Beispiele folgen.

31) $y = \int x^3 e^x\,dx;\quad u = x^3,\quad v' = e^x;$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$; $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx$; $\int x e^x\,dx = x e^x - \int e^x\,dx = x e^x - e^x$. Stellen wir nun noch das Ganze zusammen und addiren:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^x\,dx &= x^3 e^x - 3\int x^2 e^x\,dx \\ -3\int x^2 e^x\,dx &= -3x^2 e^x + 2\,.\,3\int x\,e^x\,dx \\ 2\,.\,3\int x\,e^x\,dx &= 2\,.\,3\,x e^x - 1\,.\,2\,.\,3\int e^x\,dx \\ -1\,.\,2\,.\,3\int e^x\,dx &= -1.2.3\,e^x \\ \int x^3 e^x\,dx &= e^x(x^3 - 3x^2 + 2\,.\,3\,x - 1\,.\,2\,.\,3). \end{aligned}$$

32) $\int x^4(1+x)^3\,dx = \frac{x^5}{5}(1+x)^3 - \frac{3}{5}\int x^5(1+x)^2\,dx;$

$\int x^5(1+x)^2\,dx = \frac{x^6}{6}(1+x)^2 - \frac{2}{6}\int x^6(1+x)\;dx;$

$\int x^6(1+x)\;dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8};$

$$\int x^4(1+x)^3\,dx = \frac{x^5}{5}(1+x)^3 - \frac{3\,x^6}{5\,.\,6}(1+x)^2 + \frac{3\,.\,2}{5\,.\,6}\left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{8}\right).$$

33) $\int x\,.\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x.$

34) $\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x\,.\cos x\,dx = \cos x \sin x +$
$+\int \sin^2 x\,dx = \sin x\cos x + \int(1 - \cos^2 x)\,dx;$

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cos x + \int 1\,.\,dx;$$
$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

35) $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x.$

36) $y = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$$= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,dx;$$
$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - y;$$
$$2y = -x\sqrt{1-x^2} + \text{arc}\sin x,$$
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc}\sin x.$$

37) $\int \frac{1}{x}\,l x\,dx = (lx)^2 - \int \frac{1}{x}\,l x\,dx;\quad \int \frac{1}{x}\,l x\,dx = \frac{1}{2}(lx)^2.$

38) $\int x^3\,l x\,dx = \frac{x^4}{4}\,l x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\left(l x - \frac{1}{4}\right).$

39) $\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$
$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$\int x^2 \cos x\,dx = (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x.$$

40) $\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$
$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

Durch Addition und Subtraction entsteht:
$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$
$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x(\sin x + \cos x).$$

41) $\int 1\,.\,\text{arc}\sin x\,dx = x\,\text{arc}\sin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$
$$= x\,\text{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = l f(x) + C \qquad (3)$$

ist nur die Umkehrung von Aufgabe 195 und heisst in Worten: Ist der Zähler eines Bruches der Differentialquo-

tient des Nenners, so ist das Integral des Bruches der natürliche Logarithmus des Nenners.

43) $\int \frac{a}{b+cx} dx = \frac{a}{c} \int \frac{c}{b+cx} dx = \frac{a}{c} l(b+cx)$

44) $\int \frac{x^{n-1}}{a+bx^n} dx = \frac{1}{nb} l(a+bx^n)$

45) $\int \frac{e^x}{e^x+a} dx = l(e^x+a)$

46) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x$

47) $\int \frac{\sin x}{a+b\cos x} dx = -\frac{1}{b} l(a+b\cos x).$

§. 2. Integration rationaler algebraischer Brüche.

$$\int \frac{\varphi(x)}{ax+b} dx.$$

Nachdem durch Division mit dem Nenner in den Zähler der Bruch in einen ganzen Quotienten und einen Restbruch, dessen Zähler die Variabele nicht mehr enthält, zerlegt ist, werden die einzelnen Theile integrirt.

Aufgaben.

48) $\int \frac{10x^4-17x^3-24x^2+16x-14}{2x-5} dx = \int \left(5x^3+4x^2-2x+3+\frac{1}{2x-5}\right) dx$
$= \frac{5x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{1}{2} l(2x-5).$

49) $\int \frac{x^4-6x^3+13x^2-10x+3}{x-2} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3l(x-2).$

50) $\int \frac{2x^3+7x^2+4x+2}{2x+3} dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + \frac{5}{2} l(2x+3).$

51) $\int \frac{x+a}{x+b} dx = x + (a-b) l(x+b).$

52) $\int \frac{12-28x+17x^2-10x^3}{1-5x} dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x - \frac{7}{5} l(1-5x).$

Steht die Variabele unter einem Wurzelzeichen, so ist der Ausdruck zuerst durch Substitution rational zu machen.

53) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\int \frac{z^2}{z+1}\,dz$, wenn $z = \sqrt{x}$;

$$= 2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + l(1+\sqrt{x})\right).$$

54) $\int \frac{5}{2+\sqrt{x}}\,dx = 10\sqrt{x} - 20\,l(2+\sqrt{x}).$

55) $\int \frac{x^2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} +$

$$+ x - 2\sqrt{x} + 2\,l(1+\sqrt{x})$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^2 + 2ax + b}\,dx.$$

Wenn der Zähler von höherem Grade ist, als der Nenner, so scheiden wir durch Division einen Quotienten ab und integriren denselben Glied für Glied. Das Integral des noch übrigen Restbruches hat im Allgemeinen folgende Form:

$$\int \frac{mx+n}{x^2 + 2ax + b}\,dx.$$

Zunächst lösen wir die Gleichung: $x^2 + 2ax + b = 0$, nennen die Wurzeln α und β, setzen $x^2 + 2ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ und unterscheiden 3 Fälle.

1) Die Wurzeln α und β sind reell und verschieden. Der Bruch wird dann in Partialbrüche zerlegt wie folgt:

$$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b} = \frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}.$$

Die Zähler A und B sind nun so zu bestimmen, dass die Gleichung identisch richtig ist, d. h., dass die beiden Seiten für jeden beliebigen Werth von x gleich sind. Wir setzen:

$$\frac{mx+n}{x-\beta} = A + \frac{B(x-\alpha)}{x-\beta}$$

wählen $x = \alpha$ und finden $\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta} = A$. Auf die nämliche Weise findet man auch B; doch kann B auch aus A dadurch abgeleitet werden, dass man α mit β vertauscht. $B = -\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}$.

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{\frac{m\alpha+n}{\alpha-\beta}}{x-\alpha} - \frac{\frac{m\beta+n}{\alpha-\beta}}{x-\beta}$$

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b}\,dx = \frac{(m\alpha+n)\,l(x-\alpha)-(m\beta+n)\,l(x-\beta)}{\alpha-\beta}. \quad (4)$$

Aufgaben.

56) $\int \frac{x+13}{x^2-4x-5}\,dx = 3\,l(x-5) - 2\,l(x+1)$

57) $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}\,dx = 5\,l(x+\tfrac{1}{2}) - 4\,l(x+1)$

58) $\int \frac{6x-13}{x^2-\tfrac{7}{2}x+\tfrac{3}{2}}\,dx = 2\,l(x-3) + 4\,l(x-\tfrac{1}{2})$

59) $\int \frac{\tfrac{5}{6}x-16}{x^2+3x-18}\,dx = \tfrac{7}{3}\,l(x+6) - \tfrac{3}{2}\,l(x-3)$

60) $\int \frac{3x^3+5x^2-29x-25}{x^2+x-12}\,dx = \frac{3x^2}{2}+2x+2\,l(x-3)+3\,l(x+4)$

61) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7} + x - \frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5} + 3x^{\frac{2}{3}} -$
$- 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 3\,l\left(x^{\frac{1}{6}}-1\right) + 9\,l\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)$

Setze $x^{\frac{1}{6}} = z$

62) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\,l\,\frac{x-a}{x+a}$

63) $\int \frac{1}{x^2+2x-1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2-2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{x+1-\sqrt{2}}{x+1+\sqrt{2}}$

64) $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2-(ai)^2}\,dx = \frac{1}{2ai}\,l\,\frac{x-ai}{x+ai}.$

Es ist aber auch bereits gefunden:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{a}$$

und da wir wissen, dass zwei Integralwerthe der nämlichen Funktion nur um eine Constante differiren können, so ist es gestattet zu setzen: $\frac{1}{2i}\,l\,\frac{x-ai}{x+ai} = \text{arc tg}\,\frac{x}{a} + C$. Wird diese Formel zur Verwandlung von Integralwerthen benutzt, so kann die Constante in die allgemeine Constante des Integrals aufgenommen und in der Formel vernachlässigt werden. Setzen wir nun noch $x-p$ für x und q für a, so entsteht die Formel:

$$\frac{1}{2i} l \frac{x-p-qi}{x-p+qi} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x-p}{q} \qquad (5)$$

die bald Verwendung finden wird.

2) Die beiden Wurzeln α und β sind reell und gleich. Dann nimmt die Formel (4) die Form $\frac{0}{0}$ an und erhält ihren wahren Werth, wenn man Zähler und Nenner nach β differentiirt und dann $\beta = \alpha$ setzt. So wird gefunden:

$$\int \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} dx = -\left[\frac{m\,l\,(x-\beta) - \frac{m\beta+n}{x-\beta}}{-1}\right]_{\beta=\alpha}$$
$$= m\,l\,(x-\alpha) - \frac{m\alpha+n}{x-\alpha}. \qquad (6)$$

Will man diese Formel direkt ableiten, so setzt man:

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{(x-\alpha)},$$

oder $mx+n = A + B(x-\alpha)$ und findet $B = m$ und $A = m\alpha + n$. Die beiden Theile sind dann leicht zu integriren. Man könnte auch so verfahren:

$$\int \frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} dx = \frac{m}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \int \frac{m\alpha+n}{(x-\alpha)} dx =$$
$$= m\,l\,(x-\alpha) - \frac{m\alpha+n}{(x-\alpha)}.$$

65) $\int \frac{2x-13}{(x-5)^2} dx = 2\,l\,(x-5) + \frac{3}{x-5}.$

66) $\int \frac{3x+1}{(x+2)^2} dx = 3\,l\,(x+2) + \frac{5}{x+2}.$

3) Die beiden Wurzeln α und β der Gleichung $x^2 + 2ax + b = 0$ sind complex und von der Form:

$$\alpha = p + qi, \quad \beta = p - qi.$$

Es ist dann $p = -a$, $q = \sqrt{b-a^2}$, und Formel (4) gestaltet sich, wie folgt:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b} dx = \int \frac{mx+n}{(x-p-qi)(x-p+qi)} dx$$
$$= \frac{\{m(p+qi)+n\}\,l(x-p-qi) - \{m(p-qi)+n\}\,l(x-p-qi)}{2qi}$$

$$=\frac{mp+n}{q}\cdot\frac{1}{2i}\,l\,\frac{x-p-qi}{x-p+qi}+\frac{m}{2}\,l\,(x-p-qi)\,(x-p+qi)$$

$$=\frac{m}{2}\,l\,(x^2+2ax+b)+\frac{mp+n}{q}\,\text{arc tg}\,\frac{x-p}{q}. \qquad (7)$$

Uebrigens kann diese Formel auch direkt entwickelt werden.

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx=\frac{m}{2}\int\frac{2x+2a}{x^2+2ax+b}dx+\int\frac{n-am}{x^2+2ax+b}dx$$

$$=\frac{m}{2}\,l\,(x^2+2ax+b)+\int\frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}dx.$$

Da nach der Voraussetzung $\sqrt{b-a^2}$ reell ist, so ist die Substitution $(a+x)=z\sqrt{b-a^2}$ möglich und wir erhalten:

$$\int\frac{n-am}{(x+a)^2+(b-a^2)}dx=\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\int\frac{1}{z^2+1}dz=\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\,\text{arc tg}\,z.$$

So findet man schliesslich:

$$\int\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}dx=\frac{m}{2}\,l\,(x^2+2ax+b)+\frac{n-am}{\sqrt{b-a^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}.$$

Diese Formel stimmt mit (7) überein, weil dort $p=-a$, $q=\sqrt{b-a^2}$ gesetzt ist.

Aufgaben.

67) $\int\frac{2u-10}{u^2+2u+10}du=l\,(u^2+2u+10)-4\,\text{arc tg}\,\frac{u+1}{3}$

68) $\int\frac{2u-20}{u^2-8u+25}du=l\,(u^2-8u+25)-4\,\text{arc tg}\,\frac{u-4}{3}$

69) $\int\frac{3u+4}{u^2+4u+8}du=\frac{3}{2}\,l\,(u^2+4u+8)-\text{arc tg}\,\frac{u+2}{2}$

70) $\int\frac{u+6}{u^2-3}du=\frac{1}{2}\,l\,(u^2-3)+\sqrt{3}\,l\,\frac{u-\sqrt{3}}{u+\sqrt{3}}$

71) $\int\frac{u+6}{u^2+3}du=\frac{1}{2}\,l\,(u^2+3)+2\sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{u}{\sqrt{3}}$

72) $\int\frac{6u}{u^2+4u+13}du=3\,l\,(u^2+4u+13)-4\,\text{arc tg}\,\frac{u+2}{3}$

73) $\int\frac{10u-44}{u^2-4u+20}du=5\,l\,(u^2-4u+20)-6\,\text{arc tg}\,\frac{u-2}{4}$

74) $\int\frac{u^2}{5u^2+12}du=\frac{1}{5}\,u-\frac{1}{25}\sqrt{60}\,\text{arc tg}\,u\sqrt{\frac{5}{12}}$

75) $\int \frac{4u - 5}{u^2 - 6u + 10} du = 2l(u^2 - 6u + 10) + 7 \operatorname{arc\,tg}(u - 3)$

76) $\int \frac{27u^6}{3u^2 + 2} du = \frac{9u^5}{5} - 2u^3 + 4u - \frac{8}{\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} u\sqrt{\frac{3}{2}}$

77) $\int \frac{1}{a + bu^2} du = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} u\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Integration eines Bruches von der Form:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + a_m}{x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_n}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass $m < n$ ist. Sollte diese Bedingung bei einem gegebenen Bruche noch nicht erfüllt sein, so kann ihr durch Division mit dem Nenner in den Zähler entsprochen werden. Vor allem Anderen muss nun der Nenner in Binomialfactoren zerlegt und darum die Gleichung:

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + b_n = 0$$

aufgelöst werden. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden.

1) Die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ sind verschieden. Es ist dann:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_n)$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_n)}$$

$$= \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}.$$

Soll nun einer dieser unbestimmten Zähler A, z. B. A_1, ermittelt werden, so multiplicirt man die Gleichung mit $(x - \alpha_1)$ und erhält:

$$\frac{\varphi(x)}{(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n)} = A_1 + \left[\frac{A_2}{x - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}\right](x - \alpha_1).$$

Da die Zähler A so bestimmt werden müssen, dass die Gleichung für jeden beliebigen Werth von x richtig ist, so darf auch $x = \alpha_1$ gewählt werden. So findet man:

$$A_1 = \frac{\varphi(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n)}.$$

Dass auch alle übrigen Zähler A auf die nämliche Weise bestimmt werden können, bedarf einer besonderen Erläuterung

nicht. Sie gehen auch aus A_1 hervor, wenn man nach der Reihe die einzelnen Indices mit 1 vertauscht. So ist allgemein:

$$A_p = \frac{\varphi(\alpha_p)}{(\alpha_p - \alpha_1)(\alpha_p - \alpha_2)\ldots\ldots(\alpha_p - \alpha_n)}. \qquad (8)$$

Dieser Formel kann eine etwas andere Gestalt gegeben werden. Es ist nämlich der Nenner von A_p:

$$\Big[(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{p-1})(x-\alpha_{p+1})\ldots(x-\alpha_n)\Big]_{x=\alpha_p} = \left[\frac{f(x)}{x-\alpha_p}\right]_{x=\alpha_p}.$$

Da aber $(x-\alpha_p)$ auch Factor von $f(x)$ ist, so nimmt die rechte Seite für $x=\alpha_p$ die Form $\frac{0}{0}$ an und muss der eigentliche Werth nach §. 9 ermittelt werden. Wir finden für den Nenner:

$$\left[\frac{f'(x)}{1}\right]_{x=\alpha_p} = f'(\alpha_p); \text{ und } A_p = \frac{\varphi(\alpha_p)}{f'(\alpha_p)}. \qquad (9)$$

Beispiel: $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}$$

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 7;\ f'(x) = 3x^2 - 18x + 6$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{x-7}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(-2)}{f'(-2)} = -3,\ A_2 = \frac{\varphi(4)}{f'(4)} = 2,\ A_3 = \frac{\varphi(7)}{f'(7)} = 8$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = -\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-4} + \frac{8}{x-7}.$$

78) $$\int \frac{7x^2+7x-176}{x^3-9x^2+6x+56}\,dx = -3\,l(x+2) + 2\,l(x-4) + 8\,l(x-7).$$

Aufgaben.

79) $$\int \frac{5u^2-7u+13}{u^3-6u^2+11u-6}\,du = \frac{11}{2}\,l(u-1) - 19\,l(u-2) + \frac{37}{2}\,l(u-3)$$

80) $$\int \frac{u^2+5u+41}{(u+3)(u-1)(u-\frac{1}{2})}\,du = \frac{5}{2}\,l(u+3) + \frac{47}{2}\,l(u-1) - 25\,l\left(u-\frac{1}{2}\right)$$

81) $$\int \frac{1}{u^3-a^2u}\,du = \frac{1}{2a^2}\,l(u^2-a^2) - \frac{1}{a^2}\,l u$$

82) $$\int \frac{10u^3+40u^2+40u+6}{u^4+6u^3+11u^2+6u}\,du = l u + 2\,l(u+1) + 3\,l(u+2) + 4\,l(u+3)$$

83) $\int \frac{17u^2 - u - 26}{(u^2-1)(u^2-4)} du = \frac{5}{3} l(u-1) - \frac{4}{3} l(u+1) + \frac{10}{3} l(u-2) - \frac{10}{3} l(u+2)$

84) $\int \frac{4u^3 + 9u^2 - 270u + 653}{(u-3)(u-4)(u-7)(u+5)} du = l(u^2 - 7u + 12) + 4l(u-7) - 2l(u+5)$

85) $\int \frac{u^2 - 3u + 3}{u^3 - 4u^2 - 7u + 10} du = \frac{13}{21} l(u+2) + \frac{13}{28} l(u-5) - \frac{1}{12} l(u-1)$

86) $\int \frac{5u^2 - 7au + 11a^2}{u^3 - 6au^2 + 11a^2u - 6a^3} du = \frac{9}{2} l(u-a) - 17 l(u-2a) + \frac{35}{2} l(u-3a)$

87) $\int \frac{2u^3 + 12au^2 - 8a^2u - 12a^3}{(u^2-a^2)(u^2-4a^2)} du = l(u^2-a^2) + 3l\frac{u-2a}{u+2a}$

88) $\int \frac{2u^4 - 10u^3 + 21u^2 - 20u + 5}{u^2 - 3u + 2} du = \frac{2u^3}{3} - 2u^2 + 5u + l(u-2) + 2l(u-1).$

Wenn sich unter den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ auch complexe Werthe befinden, so müssen diese paarweise conjugirt vorkommen und die Form haben: $\alpha = p + qi$, $\beta = p - qi$. Die Zerlegung in Partialbrüche lässt sich dann immer noch auf die nämliche Weise ausführen, wie an Beispielen gezeigt werden soll.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{2x}{(x-i)(x+i)(x-ri)(x+ri)}, \quad r = \sqrt{3}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-i} + \frac{A_2}{x+i} + \frac{A_3}{x-ri} + \frac{A_4}{x+ri}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(i)}{f'(i)} = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{\varphi(-i)}{f'(-i)} = \frac{1}{2}, \quad A_3 = \frac{\varphi(ri)}{f'(ri)} = -\frac{1}{2},$$

$$A_4 = \frac{\varphi(-ri)}{f'(-ri)} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-i} + \frac{\frac{1}{2}}{x+i} - \frac{\frac{1}{2}}{x-ri} - \frac{\frac{1}{2}}{x+ri}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2}[l(x-i) + l(x+i)] - \frac{1}{2}[l(x-ri) + l(x+ri)] =$$

$$= \frac{1}{2} l(x^2+1) - \frac{1}{2} l(x^2 - r^2 i^2).$$

89) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} dx = \frac{1}{2} l \frac{x^2+1}{x^2+3}.$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-2-5i} + \frac{A_2}{x-2+5i} + \frac{A_3}{x-1-2i} + \frac{A_4}{x-1+2i}$$

$$A_1 = \frac{\varphi(2+5i)}{f'(2+5i)} = 2-3i, \quad A_2 = \frac{\varphi(2-5i)}{f'(2-5i)} = 2+3i,$$

$$A_3 = \frac{\varphi(1+2i)}{f'(1+2i)} = 3-4i, \quad A_4 = \frac{\varphi(1-2i)}{f'(1-2i)} = 3+4i;$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{2-3i}{x-2-5i} + \frac{2+3i}{x-2+5i} + \frac{3-4i}{x-1-2i} + \frac{3+4i}{x-1+2i}$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} dx = (2-3i)\, l(x-2-5i) + (2+3i)\, l(x-2+5i)$$
$$+ (3-4i)\, l(x-1-2i) + (3+4i)\, l(x-1+2i)$$
$$= 2\, l(x-2-5i)(x-2+5i) + 3\, l(x-1-2i)(x-1+2i)$$
$$- 3i\, l\frac{x-2-5i}{x-2+5i} - 4i\, l\frac{x-1-2i}{x-1+2i}.$$

Multiplicirt man die Factoren aus und wendet auf die beiden letzten Theile Formel (5) an, so gibt es:

90) $\int \frac{10x^3+110x+400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)} dx = 2\, l(x^2-4x+29)$

$$+ 3\, l(x^2-2x+5) + 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{x-2}{5} + 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{2}.$$

Wie die complexen Wurzeln nur paarweise conjugirt in der Form $\alpha = p + qi$ und $\beta = p - qi$ vorkommen, so sind, wie die Beispiele zeigen, auch die entsprechenden Zähler von der conjugirten Form $A + Bi$ und $A - Bi$. Dies erklärt sich leicht so: Wird $x^n = (p+qi)^n$ entwickelt, so hat das Resultat die Form $P + Qi$, indem in P die Glieder der geraden, in Qi die Glieder der ungeraden Potenzen von i zusammen gefasst sind. Es können sich aber die Glieder der Entwickelung von $x^n = (p-qi)^n$ nur durch das Vorzeichen der ungeraden Potenzen von qi, resp. von i, von den Gliedern der vorhergehenden Entwickelung unterscheiden. und wir dürfen kurzweg $(p-qi)^n = P - Qi$ setzen, wenn wir wissen, dass $(p+qi)^n = P + Qi$

ist. Das Gesagte lässt sich leicht auf eine Summe solcher Potenzen von x übertragen. Bezeichnen wir zwei conjugirte Zähler durch A_1 und A_2, so ist:

$$A_1 = \frac{\varphi(p+qi)}{f'(p+qi)} = \frac{u+vi}{r+ti} = \frac{(u+vi)(r-ti)}{(r+ti)(r-ti)} = \frac{ru+tv}{r^2+t^2} + \frac{rv-tu}{r^2+t^2}i$$

$$A_2 = \frac{\varphi(p-qi)}{f'(p-qi)} = \frac{u-vi}{r-ti} = \frac{(u-vi)(r+ti)}{(r-ti)(r+ti)} = \frac{ru+tv}{r^2+t^2} - \frac{rv-tu}{r^2+t^2}i.$$

Obgleich sich auf diese Weise die eine Hälfte der complexen Partialbruchzähler aus der anderen von selbst ergibt, so bleiben doch die auszuführenden Rechnungen immer noch so umständlich, dass in den meisten Fällen eine andere Art der Zerlegung den Vorzug verdient. Werden nämlich zwei solche Partialbrüche addirt, so verschwinden die imaginären Theile und die Summe ist ein Bruch von der Form $\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$ und nach (7) leicht zu integriren. Wie man die Zähler findet, soll an Beispielen gezeigt werden.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)} = \frac{A}{x-1} + \frac{mx+n}{x^2-6x+13}$$

$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} = 5.$ Dieser Werth wird sofort benutzt.

$$\frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)} = \frac{5(x^2-6x+13)+(mx+n)(x-1)}{(x-1)(x^2-6x+13)}.$$

Nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten ergeben sich aus den Zählern die Relationen: $8 = 5 + m$, $61 = 65 - n$, oder $m = 3$, $n = 4$.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-1} + \frac{3x+4}{x^2-6x+13}.$$

91) $$\int \frac{8x^2-29x+61}{(x-1)(x^2-6x+13)}dx = 5l(x-1) + \frac{3}{2}l(x^2-6x+13) + \frac{13}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{2}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{mx+n}{x^2+x+1} + \frac{rx+t}{x^2-x+1}.$$

Nachdem die rechte Seite gleichnamig gemacht ist, werden die Zähler gleichgesetzt.

$$1=(mx+n)(x^2-x+1)+(rx+t)(x^2+x+1);$$
$$n+r=0,\quad n-m+r+t=0,\quad m-n+r+t=0,\quad n+t=1;$$
$$m=\tfrac{1}{2},\quad n=\tfrac{1}{2},\quad t=\tfrac{1}{2},\quad r=-\tfrac{1}{2}$$
$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}-\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}.$$

92) $$\int\frac{1}{x^4+x^2+1}dx=\tfrac{1}{4}l\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+ + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

93) $$\int\frac{15x^2+66x+21}{(x-1)(x^2+4x+29)}dx=3l(x-1)+6l(x^2+4x+29) + \frac{42}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+2}{5}$$

94) $$\int\frac{3x^2-5x+2}{x^3-2x^2+3x-6}dx=\frac{4}{7}l(x-2)+\frac{17}{14}l(x^2+3)- - \frac{1}{7\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

95) $$\int\frac{7x^2+6x-16}{(x-3)(x^2+4)}dx=5l(x-3)+l(x^2+4)+6\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}$$

96) $$\int\frac{2x^3+28x^2-257x+531}{(x^2-16x+69)(x^2-6x+16)}dx=\frac{5}{2}l(x^2-16x+69)+ + \frac{43}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-8}{\sqrt{5}}-\frac{3}{2}l(x^2-6x+16)-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-3}{\sqrt{7}}.$$

2. Die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \ldots . \alpha_n$ sind alle gleich. Dann heisst das Integral:

$$\int\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n}dx.$$

Die Zerlegung in Partialbrüche ist in diesem Falle nach dem folgenden Schema auszuführen:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n}=\frac{A_n}{(x-\alpha)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-\alpha)^{n-1}}+\ldots.+\frac{A_1}{(x-\alpha)}.$$

Durch die Substitution $x-\alpha=\frac{1}{z}$, oder $x=\frac{1+\alpha z}{z}$, geht diese Identität in die folgende über:

$$z^n.\varphi\left(\frac{(1+\alpha z)}{z}\right)=A_n z^n+A_{n-1}z^{n-1}+\ldots.+A_1 z.$$

Wird die linke Seite ausgeführt, so entsteht ein Ausdruck, wel-

cher der rechten identisch gleich ist, und wir lernen so die Werthe der A kennen.

$$\frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} = \frac{A_4}{(u-1)^4} + \frac{A_3}{(u-1)^3} + \frac{A_2}{(u-1)^2} + \frac{A_3}{u-1}$$

$$u - 1 = \frac{1}{z}, \quad u = \frac{1+z}{z};$$

$$3z^4 - 2z^3 + 4z^2 + 5z = A_4 z^4 + A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z.$$

Daraus entnehmen wir: $A_4 = 3$, $A_3 = -2$, $A_2 = 4$, $A_1 = 5$;

$$\frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} = \frac{3}{(u-1)^4} - \frac{2}{(u-1)^3} + \frac{4}{(u-1)^2} + \frac{5}{u-1}.$$

97) $$\int \frac{5u^3 - 11u^2 + 5u + 4}{(u-1)^4} du = -\frac{1}{(u-1)^3} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{4}{u-1} + 5\,l\,(u-1).$$

98) $$\int \frac{u^3 - 4u^2 + 1}{(u-2)^2} du = \frac{u^2}{2} - 4\,l\,(u-2) + \frac{7}{u-2}.$$

99) $$\int \frac{2u^5 - u^4 + 4u^2 - 5u + 1}{(u-3)^6} du = 2\,l\,(u-3) - \frac{29}{u-3} - \frac{84}{(u-3)^2} - \frac{490}{3(u-3)^3} - \frac{721}{4(u-3)^4} - \frac{427}{5(u-3)^5}.$$

100) $$\int \frac{3u^2 - 17u + 21}{(2-u)^3} du = \frac{1}{2(u-2)^2} + \frac{5}{u-2} + 3\,l\,(u-2).$$

101) $$\int \frac{6u^3 + 89u^2 + 438u + 719}{(u+5)^4} du = -\frac{4}{3(u+5)^3} + \frac{1}{(u+5)^2} + \frac{1}{u+5} + 6\,l\,(u+5).$$

Wenn der Zähler ein einfacher Werth ist, kann auch die theilweise Integration Anwendung finden.

102) $$\int u^n (u-\alpha)^{-p} du = -\frac{u^n (u-\alpha)^{-p+1}}{p-1} + \frac{n}{p-1} \int u^{n-1} (u-\alpha)^{-p+1} du$$

$$\int u^2 (u-\alpha)^{-4} du = -\frac{u^2 (u-\alpha)^{-3}}{3} + \frac{2}{3} \int u\,(u-\alpha)^{-3} du$$

$$\int u\,(u-\alpha)^{-3} du = -\frac{u\,(u-\alpha)^{-2}}{2} + \frac{1}{2} \int (u-\alpha)^{-2} du$$

$$\int (u-\alpha)^{-2} d = -(u-\alpha)^{-1}.$$

103) $$\int \frac{u^2}{(u-\alpha)^4} du = -\frac{1}{3} \left[\frac{u^2}{(u-\alpha)^3} + \frac{u}{(u-\alpha)^2} + \frac{1}{u-\alpha} \right].$$

104) $\int \frac{u^3 + a^2u - a^3}{(u-a)^3} du = (u-a) - \frac{a^3}{2(u-a)^2} - \frac{4a^2}{u-a} + 3a\,l(u-a).$

105) $\int \frac{u^2}{(a+bu)^3} du = -\frac{u^2}{2b(a+bu)^2} - \frac{u}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^3} l(a+bu).$

106) $$\int \frac{u^2}{(u^2+1)(u^2+4)} du = \frac{1}{3}\int \frac{3u^2}{(u^2+1)(u^2+4)} du =$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{4(u^2+1)-(u^2+4)}{(u^2+1)(u^2+4)} du = \frac{1}{3}\int \frac{4}{u^2+4} du -$$
$$-\frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{2} - \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} u\,.$$

3. Die Gleichung $f(x) = 0$ besitzt die gleiche Wurzel α $p$mal, die andere gleiche Wurzel β $r$mal u. s. w. und ausserdem noch die einfachen Wurzeln λ, μ, ... σ. Es ist dann:

$$f(x) = (x-\alpha)^p (x-\beta)^r \ldots (x-\lambda)(x-\mu) \ldots (x-\sigma).$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B_r}{(x-\beta)^r} + \frac{B_{r-1}}{(x-\beta)^{r-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{x-\mu} + \cdots + \frac{S}{x-\sigma}.$$

Die Zähler A_p, B_r u. s. w., sowie die ganze Reihe $L, M \ldots S$ können nach Formel (9) in bekannter Weise ermittelt werden, dagegen ergeben sich für die übrigen nach dieser Methode unbestimmte Formen. Wie sie gefunden werden können, soll an einem Beispiele gezeigt werden.

$$\frac{9x^4 - 3x^3 - 23x^2 + 30x - 1}{(x-1)^4(x+3)} = \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$$

wobei der grösseren Allgemeinheit wegen unter $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ die Summe aller Brüche verstanden werden soll, welche $(x-1)$ nicht als Nenner besitzen, in unserem Beispiele nur noch ein einziger Bruch mit dem Nenner $x+3$. Die Substitution $x - 1 = \frac{1}{z}$, oder $x = \frac{1+z}{z}$, führt zu der anderen Form:

$$\frac{12z^5+11z^4+22z^3+33z^2+9z}{4z+1}=A_4z^4+A_3z^3+A_2z^2+A_1z+\frac{\varrho\left(\frac{1+z}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1+z}{z}\right)}.$$

Die Funktionen ϱ und ψ sind in z von der 0ten Dimension. Nachdem durch Multiplication mit der geeigneten Potenz von z in ϱ und ψ die Nenner beseitigt sind, ist ihr Grad gleich hoch und ihr Quotient von der 0ten Dimension, so dass keines seiner Glieder mit einem der vorhergehenden Werthe vereinigt werden könnte, wenn man die Division auch noch ausführen wollte. Wird die Division auf der linken Seite ausgeführt, so gelangt man zu der identischen Gleichung:

$$3z^4+2z^3+5z^2+7z+\frac{2z}{4z+1}=A_4z^4+A_3z^3+A_2z^2+A_1z+\frac{\varrho\left(\frac{1+z}{z}\right)}{\psi\left(\frac{1+z}{z}\right)}$$

und kann daraus sofort die Werthe $A_4=3$, $A_3=2$, $A_2=5$, $A_1=7$ entnehmen. Wird in den übrig gebliebenen Bruch, hier $\frac{2z}{4z+1}$, wieder $z=\frac{1}{x-1}$ substituirt, so wird auch die bisher noch unbekannt gewesene Funktion $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ gefunden. Enthält der Nenner $\psi(x)$ noch weitere gleiche Factoren, so ist das angezeigte Verfahren zu wiederholen, im anderen Falle wird $\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$ auf gewöhnliche Weise zerlegt.

$$\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)}=\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{5}{(x-1)^2}+\frac{7}{x-1}+\frac{2}{x+3}$$

107) $$\int\frac{9x^4-3x^3-23x^2+30x-1}{(x-1)^4(x+3)}\,dx=-\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{5}{x-1}+7\,l(x-1)+2\,l(x+3).$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\frac{x^4-7x^3+3x^2-11x+13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A_3}{x^3}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_1}{x}+\frac{\varrho(x)}{\psi(x)}$$

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{f\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{13z^6-11z^5+3z^4-7z^3+z^2}{z^3+2z^2+2z+1}=13z^3-37z^2+51z-\frac{48z^3+64z^2+51z}{z^3+2z^2+2z+1}.$$

Es ist $A_3 = 13$, $A_2 = -37$, $A_1 = 51$. Wird nun im letzten Theile wieder $z = \frac{1}{x}$ gesetzt, so findet man:

$$\frac{\varrho(x)}{\psi(x)} = -\frac{51x^2 + 64x + 48}{(x+1)(x^2+x+1)} = -\left[\frac{B}{x+1} + \frac{mx+n}{x^2+x+1}\right].$$

Dieser Gleichung entsprechen $B = 35$, $m = 16$, $n = 13$.

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{13}{x^3} - \frac{37}{x^2} + \frac{51}{x} - \frac{35}{x+1} - \frac{16x+13}{x^2+x+1}.$$

108) $$\int \frac{x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 11x + 13}{x^3(x+1)(x^2+x+1)} dx = -\frac{13}{2x^2} + \frac{37}{x} + 51\, lx - 35\, l(x+1) - 8\, l(x^2+x+1) - \frac{10}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Das eben erläuterte Verfahren der Zählerbestimmung erfordert umständliche Rechnungen und empfiehlt sich nur dann, wenn eine grössere Anzahl von Zählern durch die nämliche Substitution ermittelt werden kann. Sind dagegen die Exponenten der Nennerbinome nicht hoch, so ist die folgende Methode einfacher in der Ausführung:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+1}.$$

Man findet auf gewöhnliche Weise $A_2 = \frac{5}{2}$, $B_2 = \frac{3}{2}$, setzt diese Werthe ein und findet nach dem Satz der unbestimmten Coefficienten $A_1 = -1$, $B_1 = 2$.

109) $$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x-1)^2} dx = -\frac{5}{2(x-1)} - l(x-1) + \frac{3}{2(x+1)} + 2\, l(x+1)$$

110) $$\int \frac{x^3 - 22x^2 + 57x + 32}{(x+1)^2(x-3)^2} dx = \frac{3}{x+1} + 5\, l(x+1) - \frac{2}{x-3} - 4\, l(x-3)$$

111) $$\int \frac{7x^3 - 32x^2 + 50x - 28}{(x-1)^3(x-4)} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\, l(x-1) + 4\, l(x-4)$$

112) $$\int \frac{x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x} dx = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)} + 2l(x-1) - lx$$

$$113)\ \int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{5}{2(x-1)} - $$
$$- \tfrac{3}{2}\, l(x-1) + \tfrac{3}{4}\, l(x^2+1) - \operatorname{arc\,tg} x$$

$$114)\ \int \frac{1}{x^3(x-1)^2(x+1)}dx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + 2\,l\,x -$$
$$\frac{1}{4}\,l(x+1) - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{7}{4}\,l(x-1).$$

Die bisher entwickelte Zerlegung in Partialbrüche ist auch noch ausführbar, wenn die gleichen Wurzeln complex sind.

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x+1}{(x-i)^2(x+i)^2} = \frac{A_2}{(x-i)^2} + \frac{A_1}{x-i} + \frac{B_2}{(x+i)^2} + \frac{B_1}{x+i} =$$
$$= \frac{-\frac{1}{4}i}{x-i} + \frac{\frac{1}{4}i}{x+i} - \frac{\frac{2i+1}{4}}{(x-i)^2} + \frac{\frac{2i-1}{4}}{(x+i)^2}.$$

$$115)\ \int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{4}i\,l\frac{x-i}{x+i} - \frac{\frac{2i-1}{4}}{x+i} + \frac{\frac{2i+1}{4}}{x-i} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{x-2}{2(x^2+1)}$$

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{\frac{i}{8}}{(x+i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x+i)^2} + \frac{\frac{i}{16}}{x+i} -$$
$$- \frac{\frac{i}{8}}{(x-i)^3} - \frac{\frac{1}{16}}{(x-i)^2} - \frac{\frac{i}{16}}{x-i}.$$

$$116)\ \int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx = \frac{1}{8}\,\frac{x^3-x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{8}\operatorname{arc\,tg} x.$$

Reductionsformeln können nicht selten dazu dienen, durch wiederholte Anwendung derartige Integrale entweder ganz auszuführen, oder doch so weit zu vereinfachen, dass ihre weitere Ausführung nach den bisherigen Methoden sehr erleichtert ist.

$$117)\ \int x^n(a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(a+bx^m)^p -$$
$$- \frac{mbp}{n+1}\int x^{m+n}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

$$118)\ \int x^4(a+bx^2)^3\,dx = \frac{x^5}{5}(a+bx^2)^3 - \frac{6b}{5}\int x^6(a+bx^2)^2\,dx.$$

In dieser Gestalt kann die Formel dazu dienen, ein positives p nach und nach so weit zu reduciren, dass die weitere Ausführung leicht ist. Soll dagegen ein negatives p dem absoluten Werthe nach verkleinert werden, so muss man die Formel zuerst umkehren. Wird dann noch p statt $p-1$ und n statt $n+m$ gesetzt, so heisst sie:

$$119)\quad \int x^n (a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^{n-m+1}}{mb(p+1)}(a+bx^m)^{p+1} - \\ -\frac{n-m+1}{mb(p+1)}\int x^{n-m}(a+bx^m)^{p+1}\,dx.$$

Die Formel wird unbrauchbar für $p=-1$.

$$120)\quad \int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{x^4}{4(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}l(1+x^2).$$

Die nämliche Aufgabe kann auch so behandelt werden:

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3(1+x^2)-x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2} - \frac{x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{x^5}{(1+x^2)^3} = \frac{x}{(1+x^2)^3} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

$$121)\quad \int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}dx = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}l(x^2+1).$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^n-1}dx.$$

Nach der Formel von Moivre (Aufgabe 428) ist

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Soll die Gleichung $x^n-1=0$ gelöst, oder $x=\sqrt[n]{1}$ nach dieser Formel gefunden werden, so setzt man $1=\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, indem man k eine beliebige ganze Zahl bedeuten lässt. Es ist dann:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und für jeden beliebigen Werth von k geht aus der Formel einer der verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ hervor:

$$k=0;\qquad w_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$k=1;\qquad w_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$k=2;\qquad w_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$$

. . . .

$$k=n-1;\qquad w_{n-1} = \cos\frac{n-1}{n}2\pi + i\sin\frac{n-1}{n}2\pi.$$

Wird mit der Wahl der ganzen Zahl k in dieser Weise fortgefahren, so wiederholen sich nur die bereits gefundenen Wurzelwerthe. So findet man z. B. für $k=n$:

$$w_n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \\ = \cos 0 + i\sin 0 = w_0.$$

Weiter ist nach dem Satze von Moivre:

$$w_1{}^2 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n} = w_2$$

$$w_1{}^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n} = w_3$$

u. s. w..

Hiernach ist: $w_0 = 1$; $w_2 = w_1{}^2$; $w_3 = w_1{}^3 \ldots w_{n-1} = w_1{}^{n-1}$.

Es ist auch $\cos\frac{n-k}{n}2\pi + i\sin\frac{n-k}{n}2\pi = \cos\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}$, oder es sind die beiden Wurzeln w_k und w_{n-k} conjugirt imaginär. Ist n gerade, so ist $w_{\frac{n}{2}}$ sich selbst conjugirt und reell, so dass in diesem Falle 2 reelle Wurzeln existiren müssen. So finden wir z. B. für $w = \sqrt[6]{1}$, dass $w_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ und $w_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ und w_5 conjugirt zu w_1 ist.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{1}$; $w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} =$
$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} = w_1^2$;
$w_3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = \cos 0 + i\sin 0 = w_0 = 1$;

2. Beispiel: $x = \sqrt[4]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = i$;
$w_2 = w_1^2 = -1$; $w_3 = w_1^3 = -i$.

3. Beispiel: $x = \sqrt[6]{1}$; $w_0 = 1$; $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$;
$w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$; $w_3 = -1$; $w_4 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$;
$w_5 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Conjugirt ist w_5 mit w_1, w_4 mit w_2 und w_3 mit sich selbst.

Der grösseren Einfachheit wegen wollen wir $w_1 = \varepsilon$ setzen und können dann die übrigen Werthe von $\sqrt[n]{1}$ durch ε^2, ε^3, $\varepsilon^4 \ldots . \varepsilon^{n-1}$ bezeichnen.

Es ist dann:

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{A_0}{x-1} + \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^2} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x-\varepsilon^{n-1}}$$

und nach Formel (9):

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{n x^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^k} = \left[\frac{x\varphi(x)}{n x^n}\right]_{x=\varepsilon^k} = \frac{\varepsilon^k \varphi(\varepsilon^k)}{n}.$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left[\frac{\varphi(1)}{x-1} + \frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2\varphi(\varepsilon^2)}{x-\varepsilon^2} + \cdots + \frac{\varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})}{x-\varepsilon^{n-1}}\right]$$

122) $$\int\frac{\varphi(x)}{x^n-1}dx = \frac{1}{n}\Big[\varphi(1)\,l(x-1) + \varepsilon\,\varphi(\varepsilon)\,l(x-\varepsilon) + \\ + \cdots\cdots + \varepsilon^{n-1}\varphi(\varepsilon^{n-1})\,l(x-\varepsilon^{n-1})\Big].$$

Die Glieder dieser Formel können paarweise zu reellen Ausdrücken vereinigt werden. Da nämlich die Wurzelwerthe ε^k und ε^{n-k} conjugirt sind, so müssen es auch die Zähler $A_k = \varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k)$ und $A_{n-k} = \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})$ sein, oder es muss $A_{n-k} = A - Bi$ sein, wenn $A_k = A + Bi$ ist. Mithin dürfen wir setzen:

$\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k)\,l(x-\varepsilon^k) + \varepsilon^{n-k}\varphi(\varepsilon^{n-k})\,l(x-\varepsilon^{n-k}) =$
$(A + Bi)\,l(x-\varepsilon^k) + (A - Bi)\,l(x-\varepsilon^{n-k}) =$

$$A\, l\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$-2B\frac{1}{2i}\,l\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}}{x-\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}$$

$$=A\, l\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right)-2B\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{n}}{\sin\frac{2k\pi}{n}}.$$

123) $$\int\frac{1}{x^3-1}dx=\frac{1}{3}\left[l(x-1)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)l\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)l\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[l(x-1)-\frac{1}{2}l(x^2+x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right].$$

124) $$\int\frac{x^2-3x}{x^4-1}dx=\frac{3}{4}l\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{1}{4}l\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x.$$

Setze in der folgenden Aufgabe $\sqrt{3}=r$.

125) $$\int\frac{x}{x^6-1}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left[\begin{array}{l} l(x-1)+\frac{-1+ri}{2}l\left(x-\frac{1+ri}{2}\right)-\frac{1+ri}{2}l\left(x+\frac{1-ri}{2}\right)\\ +l(x+1)+\frac{-1+ri}{2}l\left(x+\frac{1+ri}{2}\right)-\frac{1+ri}{2}l\left(x-\frac{1-ri}{2}\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left[l(x^2-1)-\frac{1}{2}l(x^4+x^2+1)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

Die Ausrechnung solcher Integrale ist oft leichter, wenn man die als conjugirt bezeichneten Glieder schon bei der Zerlegung paarweise zusammen fasst. So ist z. B.:

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{mx+n}{x^2+x+1}.$$

$A=\frac{\varphi(1)}{f'(1)}=\frac{a+b+c}{3}$. Wird der Werth für A substituirt, die rechte Seite gleichnamig gemacht und dann die Zähler gleich

gesetzt, so ergibt sich daraus nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten: $m = 2a - b - c$, $n = \frac{a+b-2c}{3}$.

126) $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\Big[(a+b+c)\,l\,(x-1) + \frac{1}{2}(2a-b-c)\,l\,(x^2+x+1) + (b-c)\sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big]$

127) $\int \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^4-1}dx = \frac{a+c}{4}\,l(x^2-1) + \frac{a-c}{4}\,l(x^2+1) + \frac{b+d}{4}\,l\,\frac{x-1}{x+1} + \frac{b-d}{2}\,\text{arc tg}\,x.$

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^n+1}\,dx.$$

Die Gleichung: $x^n + 1 = 0$, oder $x = \sqrt[n]{-1}$ wird wieder mit Hülfe der Moivre'schen Formel gelöst, indem man setzt: $-1 = \cos(1+2k)\pi + i\sin(1+2k)\pi$, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Dann ist:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{1+2k}{n}\pi + i\sin\frac{1+2k}{n}\pi$$

$$k = 0; \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

$$k = 1; \quad w_1 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n}$$

$$k = 2; \quad w_2 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n}$$

. . . .

$$k = n-1; \quad w_{n-1} = \cos\frac{2n-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-1}{n}\pi.$$

Es kann leicht nachgewiesen werden, dass jede andere ganze Zahl k einen Wurzelwerth w hervorbringt, welcher mit einem der vorhergehenden zusammen fällt, so dass im Ganzen nur n unter sich verschiedene Werthe möglich sind. Nach dem öfter angeführten Satze von Moivre ist

$$w_0^3 = \cos\frac{3\pi}{n} + i\sin\frac{3\pi}{n} = w_1$$

$$w_0{}^5 = \cos\frac{5\pi}{n} + i\sin\frac{5\pi}{n} = w_2$$

. . . .

$$w_0{}^{2n-1} = \cos\frac{2n-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-1}{n}\pi = w_{n-1}.$$

Auch diese Wurzelwerthe sind paarweise conjugirt imaginär, denn es ist:

$$w_{n-1-k} = \cos\frac{2n-2k-1}{n}\pi + i\sin\frac{2n-2k-1}{n}\pi$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\pi\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2k+1}{n}\pi\right)$$

$$= \cos\frac{2k+1}{n}\pi - i\sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

ein Werth, welcher zu w_k conjugirt ist.

1. Beispiel: $x = \sqrt[3]{-1}$; $w_0 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $w_1 = -1$, $w_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.

2. Beispiel: $x = \sqrt[4]{-1}$; $w_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ $w_1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $w_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $w_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Es ist w_0 zu w_3 und w_1 zu w_2 conjugirt.

Um das vorgelegte Integral auszuführen, setzen wir $w_0 = \varepsilon$ und

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = \frac{A_1}{x-\varepsilon} + \frac{A_2}{x-\varepsilon^3} + \frac{A_3}{x-\varepsilon^5} + \cdots + \frac{A_n}{x-\varepsilon^{2n-1}}$$

$$A_k = \left[\frac{\varphi(x)}{n x^{n-1}}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = \left[\frac{x\varphi(x)}{n x^n}\right]_{x=\varepsilon^{2k-1}} = -\frac{1}{n}\varepsilon^{2k-1}\varphi(\varepsilon^{2k-1}).$$

$$\frac{\varphi(x)}{x^n+1} = -\frac{1}{n}\left[\frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{x-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)}{x-\varepsilon^3} + \frac{\varepsilon^5\varphi(\varepsilon^5)}{x-\varepsilon^5} + \cdots \frac{\varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-1})}{x-\varepsilon^{2n-1}}\right].$$

128) $\int\frac{\varphi(x)}{x^n+1}dx =$

$$= -\frac{1}{n}\left[\varepsilon\varphi(\varepsilon)\,l(x-\varepsilon) + \varepsilon^3\varphi(\varepsilon^3)\,l(x-\varepsilon^3) + \ldots \varepsilon^{2n-1}\varphi(\varepsilon^{2n-1})\,l(x-\varepsilon^{2n-1})\right].$$

Ist $\varepsilon^k\varphi(\varepsilon^k) = A + Bi$, so ist der conjugirte Werth $\varepsilon^{n-1-k}\varphi(\varepsilon^{n-1-k}) = A - Bi$ und die entsprechenden Glieder des Integrales lassen sich wiederum zu reellen Werthen vereinigen.

$$(A+Bi)\,l\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi-i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)+$$
$$+(A-Bi)\,l\left(x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi\right)=$$
$$=A\,l\left(x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1\right)-2B\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k+1}{n}\pi}{\sin\frac{2k+1}{n}\pi}.$$

129) $$\int\frac{2x^2-x+3}{x^3+1}dx=2l(x+1)+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

130) $$\int\frac{x^2}{x^4+1}dx=-\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{1}{2}\,l\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\right.$$
$$\left.-\mathrm{arc\,tg}\,(x\sqrt{2}-1)-\mathrm{arc\,tg}\,(x\sqrt{2}+1)\right]$$

131) $$\int\frac{x^5+x^2+4}{x^6+1}dx=\frac{1}{6}\left[l(x^6+1)-2\sqrt{3}\,l\frac{(2x-\sqrt{3})^2+1}{(2x+\sqrt{3})^2+1}+\right.$$
$$\left.+6\,\mathrm{arc\,tg}\frac{x^3-2x}{2x^2-1}\right]$$

132) $$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\left[(a-b+c)\,l(x+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(2a+b-c)l(x^2-x+1)+(b+c)\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

133) $$\int\frac{1}{x^6-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^3+1}dx=$$
$$=\frac{1}{6}\left[l\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}l\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]$$

134) $$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\,l\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

135) $$\int\frac{x^5}{(x^3+1)^2}dx=\frac{1}{3}\,l(x^3+1)+\frac{1}{3(x^3+1)}.$$

§. 3. Reductionsformeln.

Verwickelte Integrale können oft durch sogenannte Reductionen auf einfachere Formen gebracht werden, und wir wollen einige dazu dienliche Formeln jetzt aufstellen.

Reductionsformeln für: $\int \frac{1}{(a+bx+cx^2)^n}\,dx$.

Setzt man $a+bx+cx^2=t$, so ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{2c}{t^n}-\frac{n(b+2cx)^2}{t^{n+1}}.$$

Da $(b+2cx)^2$ durch $4ct-(4ac-b^2)$ ersetzt werden kann, so ist auch:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{b+2cx}{t^n}\right)=\frac{(4ac-b^2)n}{t^{n+1}}-\frac{2c(2n-1)}{t^n}$$

Wird diese Gleichung Glied für Glied integrirt, und $n-1$ statt n gesetzt, so kann ihr folgende Form gegeben werden:

136) $$\int \frac{1}{t^n}\,dx=\frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)t^{n-1}}+\frac{(2n-3)2c}{(n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{1}{t^{n-1}}\,dx.$$

Für $b=0$ und $c=1$ entsteht die speciellere Formel:

137) $$\int\frac{1}{(x^2+a)^n}\,dx=\frac{1}{2(n-1)a}\cdot\frac{x}{(x^2+a)^{n-1}}+$$
$$+\frac{2n-3}{2(n-1)a}\int\frac{1}{(x^2+a)^{n-1}}\,dx.$$

Behält t seine Bedeutung, so ist:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{m-1}}{t^n}\right)=(m-1)\frac{x^{m-2}}{t^n}-\frac{nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}=$$
$$=\frac{(m-1)x^{m-2}t\,nx^{m-1}(b+2cx)}{t^{n+1}}=$$
$$=(m-1)a\frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}-(n-m+1)b\frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}-(2n-m+1)c\frac{x^m}{t^{n+1}}.$$

Wird wieder Glied für Glied integrirt, so kann die Gleichung in folgende Form gebracht werden:

138) $$\int\frac{x^m}{t^{n+1}}\,dx=-\frac{1}{2n-m+1)c}\cdot\frac{x^{m-1}}{t^n}-$$
$$-\frac{(n-m+1)b}{(2n-m+1)c}\int\frac{x^{m-1}}{t^{n+1}}\,dx+\frac{(m-1)a}{(2n-m+1)c}\int\frac{x^{m-2}}{t^{n+1}}\,dx.$$

Wie wir sehen, zerlegt diese Formel das vorgelegte Integral in einen fertig gestellten Theil und 2 noch auszuführende Integrale, bei welchen der Nenner t^{n+1} unverändert geblieben, der positiv gedachte Exponent m des Zählers aber um 1 und 2 kleiner geworden ist. Die Formel lässt sich leicht so umsetzen,

dass das letzte Integral zur Aufgabe wird. Der negativ gedachte Exponent m ist dann dem absoluten Werthe nach kleiner als $m - 2$, und die Formel dient dann zur Vereinfachung solcher Integrale, bei welchen m negativ ist. Gewöhnlich wird aber in diesem Falle durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ das Integral transformirt, oder vor der Integration die Zerlegung in Partialbrüche ausgeführt.

Die Reductionsformeln für: $\int x^n (a + bx^m)^p \, dx$.

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = nx^{n-1}(a + bx^m)^p \quad + mbp(a + bx^m)^{p-1} x^{m+n-1}$$

$$x^{n-1}(a + bx^m)^p = ax^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} + bx^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1}$$

ist eine identische Gleichung, durch deren Vermittelung man erhält:

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = nax^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} + \\ + b(mp + n)x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1}.$$

Das Integral dieser Gleichung kommt in 2 verschiedenen Formen zur Anwendung:

139) $$\int x^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx = \frac{x^n (a + bx^m)^p}{na} - \\ - \frac{b(mp + n)}{na} \int x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx.$$

140) $$\int x^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx = \frac{x^n (a + bx^m)^p}{b(mp + n)} - \\ - \frac{na}{b(mp + n)} \int x^{n-1}(a + bx^m)^{p-1} dx.$$

Je nach der Absicht, den Exponenten von x um m Einheiten zu vergrössern oder zu verkleinern, muss die eine oder die andere Formel Anwendung finden. Das Binom bleibt unverändert.

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = nx^{n-1}(a + bx^m)^p + \\ + bmpx^{m+n-1}(a + bx^m)^{p-1}.$$

$$bx^{m+n-1} = x^{n-1}(a + bx^m) - ax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}[x^n (a + bx^m)^p] = (mp + n)x^{n-1}(a + bx^m)^p - \\ - ampx^{n-1}(a + bx^m)^{p-1}.$$

Aus den Integralwerthen dieser Gleichung lassen sich die folgenden Formeln zusammensetzen:

141) $$\int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx = \frac{x^n(a+bx^m)^p}{mp+n} + \frac{amp}{mp+n}\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx$$

142) $$\int x^{n-1}(a+bx^m)^{p-1}\,dx = -\frac{x^n(a+bx^m)^p}{amp} + \frac{mp+n}{amp}\int x^{n-1}(a+bx^m)^p\,dx.$$

Während die zweite Formel dazu dient, den Exponenten p um 1 zu vergrössern, wird derselbe durch die erste um 1 verkleinert.

§. 4. Irrationale algebraische Funktionen.

$$\int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx.$$

Ein solches Integral wird rational durch die Substituten:

$$\sqrt[n]{a+bx} = z, \quad x = \frac{z^n - a}{b}, \quad dx = \frac{nz^{n-1}}{b}\,dz.$$

$$S = \int x\sqrt{a+bx}\,dx; \quad a+bx = z^2, \quad x = \frac{z^2-a}{b}$$

$$dx = \frac{2z}{b}\,dz; \quad S = \frac{2}{b^2}\int (z^4 - az^2)\,dz = \frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5} - \frac{az^3}{3}\right).$$

143) $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{b^2}\sqrt{(a+bx)^3}\left(\frac{a+bx}{5} - \frac{a}{3}\right).$$

Das Integral kann auch mittelst der theilweisen Integration ausgeführt werden:

$$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{3}{2}}x}{3b} - \frac{2}{3b}\int (a+bx)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$\text{„} \quad = \quad \text{„} \quad -\frac{2}{3b}\cdot\frac{2}{5b}(a+bx)^{\frac{5}{2}}.$$

144) $$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{5b^2}\sqrt[3]{(a+bx)^2}\left(bx - \frac{2a}{3}\right)$$

145) $$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 3\int (z^3-1)^2 z\,dz = 3\left(\frac{z^8}{8} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^2}{2}\right) = 3\sqrt[3]{(1+x)^2}\left(\frac{1}{8}(1+x)^2 - \frac{2}{5}(1+x) + \frac{1}{2}\right)$$

146) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$

147) $$\int \frac{1}{\sqrt[n]{(a+bx)^p}}\,dx = \frac{n}{(n-p)\,b\,\sqrt[n]{(a+bx)^{p-n}}}$$

148) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{a+bx}}\,dx = \frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+bx)^2}$$

149) $$\int x\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{28\,b^2}(4bx-3a)\sqrt[3]{(a+bx)^4}$$

150) $$\int x^2\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^3}{10} - \frac{2a}{7}(a+bx)^2 + \frac{a^2}{4}(a+bx)\right]\sqrt[3]{a+bx}$$

151) $$\int \frac{x}{\sqrt[4]{a+bx}}\,dx = \frac{4}{21\,b^2}(3bx-4a)\sqrt[4]{(a+bx)^3}$$

152) $$\int x\sqrt[3]{x-4}\,dx = \frac{3}{7}(x^2-x-12)\sqrt[3]{x-4}$$

153) $$\int \frac{x^2}{3\sqrt[3]{x+2}}\,dx = \left(\frac{x^2}{8} + \frac{9-3x}{10}\right)\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

154) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \frac{2}{27}\left(\frac{9x^2}{5} - 4x + \frac{40}{3}\right)\sqrt{5+3x}$$

155) $$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + l\,\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

156) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}$$

157) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x-a}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x-a}{a}}$$

158) $$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}$$

159) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}; \quad a>0$$

160) $$\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + x - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}$$

161) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}\,dx = -\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} -$

$- (x+1) - \frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

Setze $x = z^6$;

162) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{1+x} + l\,\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{a+1}+1}$

163) $\int \frac{1}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}\,dx = \frac{1}{b-a}\int(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})\,dx =$

$= \frac{2}{3(b-a)}\left[(x-a)^{\frac{3}{2}} + (x-b)^{\frac{3}{2}}\right]$

164) $\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3a}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right]$

165) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx = -\left(x + 4\sqrt{x} + 4\,l(1-\sqrt{x})\right)$

166) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\,l(1+\sqrt{x})$

167) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left[\frac{(1+\sqrt{x})^2}{5} - \frac{1+\sqrt{x}}{3}\right]$

168) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}\,dx = 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} +$

$+ 6\sqrt[6]{1+x} - 6\,l(1+\sqrt[6]{1+x})$

169) $\int \frac{1}{\alpha+\beta\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{b\beta}\sqrt{a+bx} - \frac{2\alpha}{b\beta^2}\,l(\alpha+\beta\sqrt{a+bx})$

170) $\int \frac{1}{(\alpha+\beta x)\sqrt{a+bx}}\,dx = 2\int \frac{1}{\alpha b - a\beta + \beta z^2}\,dz.$

Die weitere Ausführung hängt von den besonderen Werthen für a, b, α, β ab.

Bei derartigen Aufgaben kann es zweckmässig sein, durch theilweises Integriren vor der Substitution etwas hohe Werthe von n nach Anleitung der folgenden Beispiele zu reduciren.

171) $\int x^n\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\,x^n - \frac{2n}{3b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\,dx$

172) $\int x^n\sqrt[3]{a+bx}\,dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{4}{3}}\,x^n}{4b} - \frac{3n}{4b}\int x^{n-1}(a+bx)^{\frac{4}{3}}\,dx$

173) $$\int \frac{x^n}{\sqrt[3]{a+bx}} dx = \frac{3(a+bx)^{\frac{2}{3}} x^n}{2b} - \frac{3n}{2b} \int x^{n-1} (a+bx)^{\frac{2}{3}} dx.$$

$$\int \frac{A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx.$$

Mit Hülfe des Satzes von den unbestimmten Coefficienten kann ein solches Integral in einen fertigen Theil und in ein noch auszuführendes Integral zerlegt werden. Wie dies geschieht, wollen wir an einem Beispiele zeigen.

174) $$\int \frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}} dx =$$

$$= (\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) \sqrt{4 + 2x + 3x^2} +$$
$$+ K \int \frac{1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}} dx$$

worin die α und K noch unbestimmte Coefficienten sind. Zu dieser identischen Gleichung werden wir durch die Thatsache berechtigt, dass auf beiden Seiten der Form nach völlig gleiche Ausdrücke entstehen, wenn wir wieder differentiiren. Man erhält dann:

$$\frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}} =$$
$$= (4\alpha_4 x^3 + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1) \sqrt{4 + 2x + 3x^2} +$$
$$+ \frac{(1 + 3x)(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + K}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}}.$$

$$30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1 =$$
$$= (4\alpha_4 x^3 + 3\alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x + \alpha_1)(3x^2 + 2x + 4) +$$
$$+ (1 + 3x)(\alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0) + K.$$

Der Satz von den unbestimmten Coefficienten führt zu den Werthen der α. Es ist: $30 = 15\alpha_4$, $\alpha_4 = 2$; $30 = 12\alpha_3 + 9\alpha_4$, $\alpha_3 = 1$; $12 = 9\alpha_2 + 7\alpha_3 + 16\alpha_4$, $\alpha_2 = -3$; $21 = 6\alpha_1 + 5\alpha_2 + 12\alpha_3$, $\alpha_1 = 4$; $-15 = 3\alpha_0 + 3\alpha_1 + 8\alpha_2$, $\alpha_0 = -1$; $-1 = K + 4\alpha_1 + \alpha_0$, $K = -16$.

175) $$\int \frac{30x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 21x^2 - 15x - 1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}} dx =$$
$$= (2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 1)\sqrt{4 + 2x + 3x^2} - 16\int \frac{1}{\sqrt{4 + 2x + 3x^2}} dx.$$

Bevor wir uns mit der weiteren Ausführung des übrig gebliebenen Integrales beschäftigen, sollen zur Berechnung des anderen Theiles allgemein gültige Formeln aufgestellt werden, und wir wählen dazu als Zähler eine Funktion von ganz beliebigem Grade. Der einfacheren Darstellung wegen nennen wir diesen Grad nur nicht n, sondern wählen dafür eine beliebige Zahl, z. B. $n = 9$.

176) $$\int \frac{A_9 x^9 + A_8 x^8 + \ldots\ldots + A_1 x + A_0}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx =$$
$$= (\alpha_8 x^8 + \alpha_7 x^7 + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{a + 2bx + cx^2} +$$
$$+ K\int \frac{1}{\sqrt{a + 2bx + cx^2}} dx.$$

Wird diese Gleichung differentiirt und der Nenner durch Multiplication beseitigt, so erhält man:

$$A_9 x^9 + A_8 x^8 + A_7 x^7 + \ldots\ldots + A_1 x + A_0 =$$
$$= (8\alpha_8 x^7 + 7\alpha_7 x^6 + \ldots\ldots + \alpha_1)(a + 2bx + cx^2) +$$
$$+ (\alpha_8 x^8 + \alpha_7 x^7 + \alpha_6 x^6 + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0)(b + cx) + K,$$

und durch Vergleich der Coefficienten gleich hoher Potenzen von x die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned}
A_9 &= 9c\alpha_8 \\
A_8 &= 8c\alpha_7 + 17b\alpha_8 \\
A_7 &= 7c\alpha_6 + 15b\alpha_7 + 8a\alpha_8 \\
A_6 &= 6c\alpha_5 + 13b\alpha_6 + 7a\alpha_7 \\
A_5 &= 5c\alpha_4 + 11b\alpha_5 + 6a\alpha_6 \\
A_4 &= 4c\alpha_3 + 9b\alpha_4 + 5a\alpha_5 \\
A_3 &= 3c\alpha_2 + 7b\alpha_3 + 4a\alpha_4 \\
A_2 &= 2c\alpha_1 + 5b\alpha_2 + 3a\alpha_3 \\
A_1 &= 1c\alpha_0 + 3b\alpha_1 + 2a\alpha_2 \\
A_0 &= \phantom{1c\alpha_0 + {}} 1b\alpha_0 + 1a\alpha_1 + K.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Aus diesen sehr übersichtlichen Gleichungen werden die Coef-

ficienten α und K berechnet. Selbstverständlich kann unter den A eine Anzahl den Werth Null besitzen.

Die Ermittelung des übrig gebliebenen Integrales ist eine ganz verschiedene, je nachdem c positiv oder negativ ist. Wir untersuchen zuerst:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx, \quad \text{wenn } c>0 \text{ und setzen}$$

$\sqrt{a+2bx+cx^2} = x\sqrt{c} + z$, finden $dx = \frac{x\sqrt{c}+z}{b-z\sqrt{c}}\,dz$ und

$$177)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \int \frac{1}{b-z\sqrt{c}}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l(b-z\sqrt{c})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\,l(b+cx-\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2})$$

$$\text{oder} \quad = \frac{1}{\sqrt{c}}\,l(b+cx+\sqrt{c}\,\sqrt{a+2bx+cx^2})$$

je nachdem $\sqrt{c}$ mit dem $+$ oder $-$ Vorzeichen genommen wird. Dass die beiden Werthe, wie es sein muss, nur um die Constante $= \frac{1}{\sqrt{c}}\,l(b^2-ac)$ differiren, ist leicht nachzuweisen. Für $c<0$ ist die Formel unbrauchbar, so dass dieser Fall besonders behandelt werden muss.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx, \quad \text{wenn } c<0$$

$$y = \int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \int \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{(b^2-ac)-(b+cx)^2}}\,dx.$$

Man setzt $z = \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}$, $dx = \frac{1}{c}\sqrt{b^2-ac}\,dz$ und findet:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{-c}}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,dz = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sin } z.$$

$$178)\quad \int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{-c}} \text{ arc sin } \frac{b+cx}{\sqrt{b^2-ac}}.$$

Die angeführte Transformation wird unmöglich, wenn $b^2-ac=0$ ist. Dann ist aber auch $\sqrt{a+2bx+cx^2} = x\sqrt{c}+\sqrt{a}$ und das Integral leicht ausführbar. Da c negativ ist, so kann b^2-ac

nur negativ werden, wenn auch a negativ ist. Wir setzen dann $-a=\alpha$, $-c=\gamma$, erhalten $\sqrt{a+2bx+cx^2}=\sqrt{-1}\sqrt{\alpha-2bx+\gamma x^2}$, führen das Integral nach der ersten Formel aus und multipliciren mit $\sqrt{-1}$, wodurch das Integral imaginär wird.

In den Resultaten der nachfolgenden Aufgaben ist der in der Aufgabe vorkommende Wurzelwerth häufig kurzweg durch R bezeichnet.

179) $$\int \frac{x^3+5x^2-3x+4}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left(\frac{x^2}{3}+\frac{25}{12}x-\frac{163}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}+ + \frac{85}{16}\,l\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

180) $$\int \frac{4x^4+15x^3-9x^2+14x+46}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx = (x^3-2x^2+3x+7)R+ + 10\,l(3+x+R)$$

181) $$\int \frac{5x^2-2x+10}{\sqrt{3x^2-5x+8}}\,dx = \left(\frac{5}{6}x+\frac{17}{12}\right)R+ + 8\sqrt{3}\,l\left(3x-\frac{5}{2}+\sqrt{3}\,R\right)$$

182) $$\int \frac{x^3+4x^2-6x+3}{\sqrt{5+6x-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^2}{3}+\frac{9x}{2}+\frac{227}{6}\right)R- - 139 \arcsin\frac{3-x}{\sqrt{14}}$$

183) $$\int \frac{-45x^3+20x^2+65x+54}{\sqrt{7+8x-5x^2}}\,dx = (3x^2+4x+5)R- - \frac{6}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{4-5x}{\sqrt{51}}$$

184) $$\int \frac{mx^2+nx+p}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{mx}{2c}+\frac{2cn-3bm}{2c^2}\right)\sqrt{a+2bx+cx^2} + \left(p-\frac{2bcn-3b^2m+acm}{2c^2}\right)\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

185) $$\int \sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx = \int\frac{cx^2+2bx+a}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = = \left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2c}\right)R+\left(\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2c}\right)\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

186) $$\int \sqrt{3x^2+10x+9}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{5}{6}\right)R+\frac{1}{\sqrt{27}}\,l(3x+5+\sqrt{3}\,R)$$

187) $\int\sqrt{11+12x-8x^2}\,dx=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{8}\right)R-\frac{31}{8\sqrt{2}}\arcsin\frac{3-4x}{\sqrt{31}}$

188) $\int x\sqrt{8+x-x^2}\,dx=\int\frac{-x^3+x^2+8x}{\sqrt{8+x-x^2}}\,dx=$

$$=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{12}-\frac{67}{24}\right)R-\frac{33}{16}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{33}}$$

189) $\int\frac{x}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\frac{1}{c}\sqrt{a+2bx+cx^2}-$

$$-\frac{b}{c}\int\frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

190) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{2c^2}\right)R+\frac{3b^2-ac}{2c^2}\int\frac{1}{R}\,dx$

191) $\int\frac{x^3}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=\left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{6c^2}+\frac{5b^2}{2c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)R+$

$$+\left(\frac{3ab}{2c^2}-\frac{5b^3}{2c^3}\right)\int\frac{1}{R}\,dx$$

192) $\int\frac{x^4}{\sqrt{3+2x+x^2}}\,dx=\left(\frac{x^3}{4}-\frac{7x^2}{12}+\frac{x}{3}+\frac{5}{2}\right)R-$

$$-\frac{7}{2}\,l(1+x+R)$$

193) $\int\frac{x^5}{\sqrt{1+2x+3x^2}}\,dx=\left(\frac{x^4}{15}-\frac{x^3}{20}+\frac{x^2}{108}+\frac{7x}{405}-\frac{19}{810}\right)R+$

$$+\frac{1}{162\sqrt{3}}\,l(1+3x+\sqrt{3}\,R)$$

194) $\int x\sqrt{a+2bx+cx^2}\,dx=\int\frac{cx^3+2bx^2+ax}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx=$

$$=\left(\frac{x^2}{3}+\frac{bx}{6c}+\frac{a}{3c}-\frac{b^2}{2c^2}\right)R+\left(\frac{b^3}{2c^2}-\frac{ab}{2c}\right)\int\frac{1}{R}\,dx$$

195) $\int\sqrt{(5x^2+4x+3)^3}\,dx=\int\frac{25x^4+40x^3+46x^2+24x+9}{\sqrt{5x^2+4x+3}}\,dx=$

$$=\left(\frac{5x^3}{4}+\frac{3x^2}{2}+\frac{79x}{40}+\frac{63}{100}\right)R+\frac{363}{200\sqrt{5}}\,l(2+5x+\sqrt{5}\,R)$$

196) $\int(2x-5)\sqrt{2+3x-x^2}\,dx=\int\frac{(2x-5)(2+3x-x^2)}{\sqrt{2+3x-x^2}}\,dx=$

$$=\left(\frac{2x^2}{3}-3x+\frac{1}{6}\right)R+\frac{17}{4}\arcsin\frac{3-2x}{\sqrt{17}}$$

197) $\int (x^2 - 3x + 5)\sqrt{3x^2 - 2x + 6}\,dx =$
$$= \left(\frac{x^3}{4} - \frac{37x^2}{36} + \frac{625}{216}x - \frac{503}{216}\right) R + \frac{2227}{216\sqrt{3}}\, l(3x - 1 + \sqrt{3}\,R)$$

198) $\int \frac{1}{\sqrt{a + bx^2}}\,dx = \pm \frac{1}{\sqrt{b}}\, l(bx \pm \sqrt{b}\sqrt{a + bx^2})$

199) $\int \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}}\,dx = \frac{-1}{\sqrt{b}}$ arc sin $x\sqrt{\frac{b}{a}}$

200) $\int \frac{1}{\sqrt{2bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l(b + cx + \sqrt{c}\sqrt{2bx + cx^2})$

201) $\int \frac{1}{\sqrt{2bx - cx^2}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{c}}$ arc sin $\frac{b - cx}{b}$

202) $\int \sqrt{a + bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\, l\left(bx + \sqrt{b}\sqrt{a + bx^2}\right)$

203) $\int \sqrt{a - bx^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}$ arc sin $x\sqrt{\frac{b}{a}}$

204) $\int \sqrt{2ax + x^2}\,dx = \frac{a + x}{2}\,R - \frac{a^2}{2}\, l(a + x + R)$

205) $\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x - a}{2}\,R - \frac{a^2}{2}$ arc sin $\frac{a - x}{a}$

206) $\int x^2\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \left(\frac{x^3}{4} - \frac{ax^2}{12} - \frac{5a^2x}{24} - \frac{5a^3}{8}\right) R -$
$$- \frac{5a^4}{8} \text{ arc sin } \frac{a - x}{a}.$$

Die Relationen (10) führen leicht zu den den folgenden Formeln:

207) $\int \frac{x^n}{\sqrt{a + bx^2}}\,dx = (\alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \ldots \alpha_1 x + \alpha_0)\sqrt{a + bx^2}$
$$+ K\int \frac{1}{\sqrt{a + bx^2}}\,dx.$$

$\alpha_{n-1} = \frac{1}{nb}$; $\quad \alpha_{n-2} = 0$; $\quad \alpha_{n-3} = -\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{a}{b}\,\alpha_{n-1}$; $\quad \alpha_{n-4} = 0$;

$\alpha_{n-5} = -\frac{n-3}{n-4}\,\frac{a}{b}\,\alpha_{n-3}$; $\alpha_{n-6} = 0$; $\alpha_{n-7} = -\frac{n-5}{n-6}\cdot\frac{a}{b}\,\alpha_{n-5}$ u.s.w.

$K = -a\,\alpha_1$.

208) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{1}{b} \int \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{1}{b} \sqrt{a+bx^2}$

209) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{x}{2b} \sqrt{a+bx^2} - \frac{a}{2b\sqrt{b}} l(bx + \sqrt{b}\, R)$

210) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) \sqrt{a+bx^2}$

211) $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+5x^2}} dx = \left(\frac{x^3}{20} - \frac{3x}{50}\right) R + \frac{6}{25\sqrt{5}} l(5x + \sqrt{5}\, R)$

212) $\int \frac{x^5}{\sqrt{3+2x^2}} dx = \left(\frac{x^4}{10} - \frac{x^2}{5} + \frac{3}{5}\right) \sqrt{3+2x^2}$

Das Integral (207) kann auch mittelst einer Reductionsformel ausgeführt werden.

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{1}{b} \int x^{n-1} \frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{b} x^{n-1} \sqrt{a+bx^2} - \frac{n-1}{b} \int x^{n-2} \sqrt{a+bx^2}\, dx$$

$$\int x^{n-2} \sqrt{a+bx^2}\, dx = a \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}} dx + b \int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}} dx$$

213) $\int \frac{x^n}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{1}{nb} x^{n-1} \sqrt{a+bx^2} - \frac{(n-1)a}{nb} \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a+bx^2}} dx$

214) $\int \frac{x^6}{\sqrt{3-5x^2}} = -\left(\frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{40} + \frac{9x}{400}\right) \sqrt{3-5x^2} + \frac{27}{400\sqrt{5}} \arcsin \frac{5x}{\sqrt{15}}.$

Wenn n eine gerade Zahl, so ist:

215)

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\left(\frac{1}{n} x^{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} x^{n-3} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} x^{n-5} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2} x\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} \cdots \frac{3}{2} \arcsin x$$

216) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{5x^3}{24} + \frac{5x}{16}\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{5}{16} \arcsin x.$

Wenn n eine ungerade Zahl, so ist:

217) $\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\left(\frac{1}{n} x^{n-1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} x^{n-3} + \right.$
$$\left. + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-4} x^{n-5} + \ldots \right) \sqrt{1-x^2}$$

218) $$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\left(\frac{x^6}{7}+\frac{6x^4}{35}+\frac{8x^2}{35}+\frac{16}{35}\right)\sqrt{1-x^2}$$

$$S = \int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Durch die Substitution $x-\alpha=\frac{1}{z}$ verwandelt sich S in folgendes Integral:

$$S = -\int \frac{1}{\sqrt{c+2(b+c\alpha)z+(a+2b\alpha+c\alpha^2)z^2}}\,dz.$$

Je nachdem der Coefficient von z^2 positiv oder negativ ist, ist der Werth dieses Integrales verschieden.

1) $a+2b\alpha+c\alpha^2>0$ und $=m$ gesetzt:

219) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \mp\frac{1}{\sqrt{m}}\, l\, \frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x \pm \sqrt{m}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x-\alpha}.$$

2) $a+2b\alpha+c\alpha^2<0$ und $=m$

220) $$\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-m}} \arcsin \frac{a+b\alpha+(b+c\alpha)x}{(x-\alpha)\sqrt{b^2-ac}}.$$

Ist endlich 3) $a+2b\alpha+c\alpha^2=0$

so ist α eine Wurzel von $a+2bx+cx^2=0$. Nennen wir die andere Wurzel β, so ist $c(x-\alpha)(x-\beta)=cx^2+2bx+a$. Wird endlich $(x-\alpha)=z^2$ gesetzt, so ist $(x-\beta)=(z^2+\alpha-\beta)$ und

$$S = \frac{2}{\sqrt{c}}\int \frac{1}{z^2\sqrt{z^2+\alpha-\beta}}\,dz.$$

Durch die weitere Substitution $z=\frac{1}{u}$ geht S über in:

$$S = -\frac{2}{\sqrt{c}}\int \frac{u}{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}\,du = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)u^2+1}}{\alpha-\beta}$$

und daraus durch die umgekehrten Substitutionen:

$$S = -\frac{2}{c}\,\frac{\sqrt{c(x-\alpha)(x-\beta)}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)} = -\frac{2}{c}\,\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{(\alpha-\beta)(x-\alpha)}.$$

Da ferner $\alpha + \beta = -\frac{2b}{c}$ ist, so kann $\alpha - \beta = 2\frac{b + c\alpha}{c}$ gesetzt werden. So wird schliesslich:

221) $\int \frac{1}{(x-\alpha)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{(b + c\alpha)(x - \alpha)}$

222) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\, l\, \frac{2x + 4 + \sqrt{6}\,R}{x - 1}$

223) $\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2 - 6x + 1}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{7}} \arcsin \frac{x + 5}{(x-2)\sqrt{8}}$

224) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1 - x^2}}\, dx = -\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$

Wenn $a > 0$ ist, so ist:

225) $\int \frac{1}{x\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{a + bx + \sqrt{a}\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{x}.$

Wenn $a < 0$ ist, so ist:

226) $\int \frac{1}{x\sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{a + bx}{x\sqrt{b^2 - ac}}$

227) $\int \frac{1}{x\sqrt{2ax - x^2}}\, dx = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax}$

228) $\int \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}\, dx = l\, \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}$

229) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}\, dx = -\arcsin \frac{x - 2}{x\sqrt{5}}$

230) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = -\arcsin \frac{1}{x}.$

$$S = \int \frac{1}{(x - \alpha)^n \sqrt{a + 2bx + cx^2}}\, dx.$$

Durch die Substitution $x - \alpha = \frac{1}{z}$ erhält man:

$$I = -\int \frac{z^{n-1}}{\sqrt{c + 2(b + c\alpha)z + (a + 2b\alpha + c\alpha^2)z^2}}\, dz.$$

231) $$\int \frac{1}{(x-1)^3 \sqrt{3-2x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{3}{x-1}\right)\sqrt{3-2x^2} + 7\,l\,\frac{3-2x-\sqrt{3-2x^2}}{x-1}$$

232) $$\int \frac{1}{(x-2)^4 \sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = \left(\frac{1}{9(x-2)^3} + \frac{2}{27(x-2)}\right) R$$

233) $$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

234) $$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx = \left(\frac{-1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x}\right) R + \left(\frac{3b^2}{2a^2} - \frac{c}{2a}\right)\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx$$

235) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-4x+x^2}}\,dx = -\frac{1}{x}R + 2\,l\,\frac{1-2x-R}{x}$$

236) $$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$$

237) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{3-2x+x^2}}\,dx = -\left(\frac{1}{9x^3} + \frac{5}{54x^2} + \frac{1}{54x}\right) R - \frac{2}{27\sqrt{3}}\,l\,\frac{3-x-\sqrt{3}\,R}{x}$$

238) $$\int \frac{\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x}\,dx = \int \frac{b+cx}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx + b\int \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

$$\int \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{a+2bx+cx^2}}\,dx.$$

Man zerlegt $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche und damit das ganze Integral in eine Summe integrirbarer Theile.

239) $$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x^2+4x-7}}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+2}\right)\frac{1}{R}\,dx = \frac{1}{\sqrt{8}}\,l\,\frac{11x-1-\sqrt{32}\,R}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{4x+11}{5(x+2)}$$

240) $$\int \frac{4x+17}{x^2+x-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}} dx = \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{5-4x}{(x-2)\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \arcsin \frac{6x+5}{(x+3)\sqrt{10}}$$

241) $$\int \frac{3x-5}{(x-1)^2\sqrt{x^2+4}} dx = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{5}} l \frac{x+4-\sqrt{5}\sqrt{x^2+4}}{x-1}$$

242) $$\int \frac{1}{(x^2-9)\sqrt{5+6x-7x^2}} dx = \frac{1}{6\sqrt{40}} \arcsin \frac{7-9x}{(x-3)\sqrt{11}} - \frac{1}{6\sqrt{76}} \arcsin \frac{12x-2}{(x+3)\sqrt{11}}.$$

$$S = \int \frac{1}{(x-p-qi)\sqrt{a+2bx+cx^2}} dx.$$

Dieses Integral geht hervor aus (219), wenn man $\alpha = p + qi$ setzt. Dann ist auch $m = a + 2bp + c(p^2 - q^2) + 2q(b+cp)i$. Setzen wir $m = \varrho(\cos t + i \sin t)$, oder $\varrho \cos t = a + 2bp + c(p^2 - q^2)$, $\varrho \sin t = 2q(b+cp)$, so sind ϱ und t bestimmbar. Zugleich ist:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \cdot \frac{1}{\cos\frac{t}{2} + i \sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right) l \left[a + bp + (b+cp)x - \sqrt{\varrho}\cos\frac{t}{2} R + \{(b+cx)q + \sqrt{\varrho} R\} i\right] - \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right) l(x-p-qi).$$

Wenn nun das vorstehende Integral bei der Zerlegung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in Partialbrüche entstanden ist, so muss noch ein zweites existiren, welches sich von diesem nur durch das Vorzeichen von i unterscheidet. In abgekürzter Bezeichnung mögen beide heissen:

$$S = (A+Bi)\, l(P+Qi) - (A+Bi)\, l(x-p-qi)$$
$$S_1 = (A-Bi)\, l(P-Qi) - (A-Bi)\, l(x-p+qi)$$

$$S + S_1 = A\, l(P^2+Q^2) + 2B \operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q} - A\, l(x-p)^2 + q^2) + 2B \operatorname{arc\,tg}\frac{x-p}{q}.$$

Setzt man $x^2 = z$, so ist:

243) $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+z)\sqrt{1-z^2}}\,dz =$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-z}{1+z}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

244) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$

$$= -\sqrt{a^2-x^2} + a \,.\, \text{arc sin}\,\frac{x}{a}$$

Setzt man $x^3 = z^2$, so ist:

245) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{a^3-z^2}} = \frac{2}{3}\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{x^3}{a^3}}$

Setze $x^2 = z$ in:

246) $\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx + \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + \frac{1}{2}\int \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}\,dz =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-x^4} + \frac{1}{4}\,\text{arc sin}\,x^2$$

247) $\int (x+\sqrt{1+x^2})^n\,dx = \frac{1}{2}\int (z^n + z^{n-2})\,dz$ für $z = x + \sqrt{1+x^2}$

" $$= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n+1} + \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{n+1}}{n-1}\right].$$

§. 5. Exponential- und logarithmische Funktionen.

$$\int f(e^x)\,dx.$$

Diese Funktionen werden integrirbar durch die Substitution $z = e^x$.

248) $\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m}$

249) $\int (e^{3x} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{3x}}{3} + 2\sqrt{e^x}$

250) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{z-1}{z(z+1)}\,dz = 2\,l\,(e^x+1) - x$

251) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \text{arc tg } e^x$

252) $\int \frac{1}{\sqrt{a + be^x}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} l \frac{\sqrt{a + be^x} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^x} + \sqrt{a}}$; $z = \sqrt{a + be^x}$

253) $\int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}$

254) $\int e^x \sqrt{1 + e^x}\, dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + e^x)^3}$

255) $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = -\frac{1}{e^x - 1}$

256) $\int (e^x + e^{-x})^2 dx = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + 2x$

257) $\int \frac{e^x}{e^x + a} dx = l(e^x + a)$

258) $\int \frac{4e^x + 6e^{-x}}{9e^x - 4e^{-x}} dx = \frac{35}{36} l \left(e^{2x} - \frac{4}{9}\right) - \frac{3x}{2}$

259) $\int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx = l(1 + e^x) - \frac{1}{e^x} - x$

260) $\int \frac{e^x}{(e^x + a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(e^x + a)^{n-1}}$.

$$\int f(x, e^x)\, dx.$$

Neben der Substitution wird bei diesen Funktionen auch das theilweise Integriren oft mit Vortheil angewendet.

261) $\int e^x x^4 dx = e^x x^4 - 4 \int e^x x^3 dx$

262) $\int e^x x^3 dx = e^x x^3 - 4.3 \int e^x x^2 dx$

u. s. w.

263) $\int e^x x^4 dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$

264) $\int e^x x^n dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n[n-1]x^{n-2} + \ldots\ldots)$

265) $\int e^{mx} x^n dx = \frac{e^{mx} x^n}{m} - \frac{n}{m} \int e^{mx} x^{n-1} dx$

266) $\int (a+bx)^n e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}(a+bx)^n}{m} - \frac{nb}{m}\int e^{mx}(a+bx)^{n-1}\,dx.$

Diese Reductionsformel ist für positive und negative m gleichmässig anwendbar. Man kann sie auch umkehren und $-p$ für $n-1$ setzen.

267) $\int (a+bx)^{-p} e^{mx}\,dx = -\frac{e^{mx}(a+bx)^{-p+1}}{(p-1)b} +$

$$+ \frac{m}{(p-1)b}\int e^{mx}(a+bx)^{-p+1}\,dx.$$

Für $p=1$ ist diese Formel nicht mehr brauchbar, das Integral muss dann durch Reihenentwickelung weiter geführt werden.

208) $\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{1\,.\,2} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,3} + \cdots\cdots\right) dx =$

$$= lx + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \cdots\cdots$$

269) $\int x^4 e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{3}{4}\right)$

270) $\int x^3 e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$

271) $\int \frac{e^x}{x^4}\,dx = -e^x\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6x}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x}{x}\,dx$

272) $\int \frac{e^x}{(x-a)^n}\,dx = e^x \int \frac{e^z}{z^n}\,dz,$ wenn $z = x - a$.

Exponentialfunktionen in der Basis a werden in solche in der Basis e umgewandelt, indem man $a = e^m$ setzt.

273) $\int a^{bx} f(x)\,dx = \int e^{mbx} f(x)\,dx;\quad m = la.$

274) $\int x^3 a^x\,dx = a^x\left(\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4}\right).$

275) $\int \frac{a^x}{x^4}\,dx = -a^x\left(\frac{1}{3x^3} + \frac{m}{6x^2} + \frac{m^2}{6x}\right) + \frac{m^3}{6}\int \frac{a^x}{x}\,dx.$

276) $\int f(x)\,dx = \int e^z f(z)\,dz,$ wenn $z = lx$ ist.

277) $\int (lx)^n\,dx = \int e^z z^n\,dz = e^z(z^n - nz^{n-1} + \ldots\ldots) =$

$$= x[(lx)^n - n(lx)^{n-1} + n(n-1)(lx)^{n-2} + \ldots\ldots].$$

Dieses Integral lässt sich auch sehr leicht mittelst der theilweisen Integration ausführen.

278) $\int (lx)^n dx = x(lx)^n - n\int (lx)^{n-1} dx$

279) $\int lx\, dx = x(lx - 1)$

280) $\int (lx)^2 dx = x([lx]^2 - 2lx + 2)$

281) $\int x^n lx\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} lx - \frac{1}{n+1}\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right)$

282) $\int x^{-n} lx\, dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\left(lx + \frac{1}{n-1}\right)$

283) $\int x^3 lx\, dx = \frac{x^4}{4}\left(lx - \frac{1}{4}\right)$

284) $\int \frac{lx}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3}\left(lx + \frac{1}{3}\right)$

285) $\int \frac{1}{x} lx\, dx = \frac{1}{2}(lx)^2$

286) $\int (a+bx)^n lx\, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} lx - \frac{1}{(n+1)b}\int \frac{(a+bx)^{n+1}}{x} dx$

287) $\int (4+3x)^2 lx\, dx = \frac{(4+3x)^3}{9} lx - \frac{64}{9} lx - 16x - 6x^2 - x^3$

288) $\int l(a+bx)\, dx = \frac{a+bx}{b}(l[a+bx] - 1)$

289) $\int x^n l(a+bx^m)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} l(a+bx^m) - \frac{mb}{n+1}\int \frac{x^{m+n}}{a+bx^m} dx$

290) $\int l(a+bx^2)\, dx = x\,l(a+bx^2) - 2x + 2a\int \frac{1}{a+bx^2} dx$

291) $\int x\,l(1+x^2)\, dx = \frac{1+x^2}{2} l(1+x^2) - \frac{x^2}{2}$

292) $\int x^3 l(x^2+3) dx = \frac{x^4}{4} l(x^2+3) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 9\,l(x^2+3)\right)$

293) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} lx\, dx = lx\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} dx =$

$$= (lx - 1)\sqrt{a^2+x^2} - a\,l\frac{a - \sqrt{a^2+x^2}}{x}.$$

§. 6. Trigonometrische und cyklometrische Funktionen.

Die Grundformeln zur Integration dieser Funktionsarten werden durch Umkehrung der entsprechenden Differentialformeln gewonnen.

294) $\int \cos x \, dx = \sin x$

295) $\int \sin x \, dx = -\cos x$

296) $\int \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \cos nx$

297) $\int \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \sin nx$

298) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x$

299) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$

300) $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x$

301) $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x$

302) $\int \operatorname{tg} nx \, dx = -\frac{1}{n} l \cos nx$

303) $\int \operatorname{cotg} nx \, dx = \frac{1}{n} l \sin nx$

304) $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C_1$

„ $= \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_2 .$

Je 2 dieser 3 Werthe differiren nur um eine Constante.

305) $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$

306) $\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x .$

Aus (300) und (301) folgt:

307) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) \, dx = l \sin x - l \cos x = l \operatorname{tg} x,$ oder:

308) $\int \frac{2}{\sin 2x} dx = l \operatorname{tg} x$, oder:

309) $\int \frac{1}{\sin x} dx = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

310) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = -\int \frac{1}{\sin z} dz = -l \operatorname{tg} \frac{z}{2} =$

$$= -l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = l \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Höhere Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ können mit Hülfe von Reductionsformeln integrirt werden. Sei:

$$S_n = \int \sin^n x \, dx.$$

311) $\int \sin^n x \, dx = \int \sin^{n-1} x \sin x \, dx =$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx$$

$$S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n$$

$$n S_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) S_{n-2}$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Wird die Formel umgekehrt und $n-2$ durch $-p$ ersetzt, so entsteht:

312) $\int (\sin x)^{-p} dx = -\frac{1}{p-1} \cos x (\sin x)^{-p+1} +$

$$+ \frac{p-2}{p-1} \int (\sin x)^{-p+2} dx.$$

Die beiden Formeln dienen dazu, den Exponenten von $\sin x$ auf 2 oder auf 1 zu erniedrigen und so das Integral auf eine nach früheren Formeln ausführbare Form zu bringen.

313) $\int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3}\left(\sin^2 x + 2\right) \cos x$

314) $\int \sin^4 x \, dx = -\left(\frac{1}{4} \sin^3 x + \frac{3}{8} \sin x\right) \cos x + \frac{3x}{8}$

315) $\int \sin^5 x\, dx = -\left(\frac{1}{5}\sin^4 x + \frac{4}{15}\sin^2 x + \frac{8}{15}\right)\cos x$

316) $\int \frac{1}{\sin^3 x}\, dx = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

217) $\int \frac{1}{\sin^4 x}\, dx = -\left(\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{3\sin x}\right)\cos x\,.$

Die Reductionsformeln für $\cos^n x$ werden auf dieselbe Weise direct gewonnen, wie diejenigen für $\sin^n x$; sie können aber auch aus (311) und (312) dadurch abgeleitet werden, dass man $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin z$ setzt.

318) $\int \cos^n x\, dx = \int \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int \sin^n z\, dz\,.$

Wird das Integral entwickelt und darin wieder $\sin z$ durch $\cos x$ und $\cos z$ durch $\sin x$ ersetzt, so erhält man:

319) $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$

320) $\int (\cos x)^{-p} dx = \frac{1}{p-1}\sin x (\cos x)^{-p+1} + \frac{p-2}{p-1}\int (\cos x)^{-p+2} dx$

321) $\int \cos^4 x\, dx = \left(\frac{1}{4}\cos^3 x + \frac{3}{8}\cos x\right)\sin x + \frac{3}{8} x$

322) $\int \cos^5 x\, dx = \left(\frac{1}{5}\cos^4 x + \frac{4}{15}\cos^2 x + \frac{8}{15}\right)\sin x$

323) $\int \frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

324) $\int \frac{1}{\cos^5 x}\, dx = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8} l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

Mit Hülfe der beiden Formeln:

$$\sin nx = \frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{2i}, \quad \cos nx = \frac{e^{nxi} + e^{-nxi}}{2i}$$

lassen sich $\sin^n x$ und $\cos^n x$ in Funktionen der vielfachen Bögen umwandlen, und wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie dies geschieht.

$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}}{32i}$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{2i} - 5\,\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + 10\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right].$$

325) $$\int \sin^5 x\,dx = \frac{1}{16}\left[-\frac{\cos 5x}{5} + \frac{5\cos 3x}{3} - 10\cos x\right]$$

326) $$\int \cos^6 x\,dx = \frac{\sin 6x}{192} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{5x}{16}$$

327) $$\int \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{32}\left[\frac{\sin 6x}{6} - \frac{3\sin 4x}{2} + \frac{15\sin 2x}{2}\right] + \frac{5x}{16}$$

328) $$\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{64}\left[\frac{\sin 7x}{7} + \frac{7\sin 5x}{5} + 7\sin 3x + 35\sin x\right]$$

329) $$\int \cos^8 x\,dx = \frac{1}{128}\left[\frac{\sin 8x}{8} + \frac{4\sin 6x}{3} + 7\sin 4x + 28\sin 2x\right] + \frac{35x}{128}.$$

Wird $\sin x = y$ gesetzt, bez. $\cos x = y$, so erhält man leicht:

$$\int \sin^n x\,dx = \int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy; \quad \int \cos^n x\,dx = -\int \frac{y^n}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

330) $$\int \sin^3 x\,dx = -\int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx = -\int (1-y^2)\,dy = -\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x$$

331) $$\int \cos^5 x\,dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1 - y^2)^2\,dy = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x$$

332) $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1 - \cos^2 x} = \int -\frac{dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = l\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

333) $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\left[\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{4}{15\sin^3 x} + \frac{8}{15\sin x}\right]\cos x$$

334) $$\int\frac{dx}{\sin^7 x}=-\left[\frac{1}{6\sin^6 x}+\frac{5}{24\sin^4 x}+\frac{5}{16\sin^2 x}\right]\cos x+ \\ +\frac{5}{16}\,l\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

335) $$\int\frac{dx}{\cos^6 x}=\frac{\sin x}{5\cos^5 x}+\frac{4\sin x}{15\cos^3 x}+\frac{8}{15}\,\mathrm{tg}\,x\,.$$

Setzt man $\sin x=\frac{1}{y}$, oder $\cos x=\frac{1}{y}$, so wird man finden:

$$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\int\frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy;\quad \int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{y^{n-1}}{\sqrt{y^2-1}}\,dy.$$

336) $$\int\frac{dx}{\cos^7 x}=\left[\frac{1}{6\cos^6 x}+\frac{5}{24\cos^4 x}+\frac{5}{16\cos^2 x}\right]\sin x+ \\ +\frac{5}{16}\,l\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

337) $$\int\frac{dx}{\cos^8 x}=\left[\frac{1}{7\cos^7 x}+\frac{6}{35\cos^5 x}+\frac{8}{35\cos^3 x}+\frac{16}{35\cos x}\right]\sin x$$

338) $$\int\sin^n x\cos x\,dx=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}$$

339) $$\int\cos^n x\sin x\,dx=-\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}.$$

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx\,.$$

Gewöhnlich wird dieses Integral durch theilweise Integration auf ein einfacheres Integral derselben Art reducirt:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}+\frac{m-1}{n+1}\int\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx$$

$\sin^{m-2}x\cos^{n+2}x=\sin^{m-2}x\cos^n x\,(1-\sin^2 x)=\sin^{m-2}x\cos^n x-$ $-\sin^m x\cos^n x$. Wird hiernach das letzte Integral zerlegt und dann reducirt, so erhält man:

340) $$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=-\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n}+ \\ +\frac{m-1}{m+n}\int\sin^{m-2}x\cos^n x\,dx.$$

Setzt man $m=p+2$, so wird:

$$\int\sin^{p+2}x\cos^n x\,dx=-\frac{\sin^{p+1}x\cos^{n+1}x}{p+n+2}+\frac{p+n}{p+n+2}\int\sin^p x\cos^n x\,dx.$$

$$341)\quad \int \sin^p x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{n+1} x}{p+1} + \\ + \frac{p+n+2}{p+1} \int \sin^{p+2} x \cos^n x\, dx.$$

Während (340) dazu dient, ein positives m zu verkleinern, wird durch (341) ein negatives p vergrössert; in beiden Fällen bleibt n ungeändert. Wird wieder $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ statt x, $-dx$ statt dx gesetzt, so entstehen aus den beiden letzten Formeln die folgenden:

$$342)\quad \int \cos^m x \sin^n x\, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \\ + \frac{m-1}{n+m} \int \cos^{m-2} x \sin^n x\, dx$$

$$343)\quad \int \sin^n x \cos^p x\, dx = - \frac{\sin^{n+1} x \cos^{p+1} x}{p+1} + \\ + \frac{p+n+2}{p+1} \int \sin^n x \cos^{p+2} x\, dx$$

$$344)\quad \int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \left[\frac{\sin^5 x}{6} - \frac{\sin^3 x}{24} - \frac{\sin x}{16}\right] \cos x + \frac{x}{16}$$

$$345)\quad \int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \left[\sin^6 x - \frac{\sin^4 x}{5} - \frac{4 \sin^2 x}{15} - \frac{8}{15}\right] \frac{\cos x}{7}.$$

Aufgaben dieser Art können auch so behandelt werden:

$$346)\quad \int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)\, dx = \left[\frac{\sin^3 x}{4} - \\ - \frac{\sin x}{8}\right] \cos x + \frac{x}{8}$$

$$347)\quad \int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$$

$$348)\quad \int \sin^3 x \cos^6 x\, dx = \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^7 x}{7}$$

$$349)\quad \int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \\ - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9}.$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos x}\, dx, \qquad \int \frac{\cos^n x}{\sin x}\, dx.$$

Wird im ersten Integral $\sin x = y$, im zweiten $\cos x = y$ gesetzt, so wandeln sich dieselben um in:

$$-\int \frac{y^n}{y^2 - 1}\, dy \quad \text{und} \quad \int \frac{y^n}{y^2 - 1}\, dy.$$

Die Division wird ausgeführt, der Quotient integrirt, in dem Restbruch aber vor der Integration die umgekehrte Substitution vollzogen, weil so ein leicht ausführbares Integral entsteht.

350) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^2 x}{2} - l \cos x$

351) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x}\, dx = -\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} - \sin x + l\, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

352) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\, dx = \frac{\cos^3 x}{3} + \cos x + l\, \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$

353) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\, dx = \frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^2 x}{2} + l \sin x$

354) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\, dx = \frac{1}{(n-1 \cos^{n-1} x}$

355) $\int \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx = -\frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} x}.$

Statt mittelst der Formeln (341) und (343) negative Exponenden zu reduciren, können derartige Aufgaben auch so behandelt werden:

356) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{\sin x\,(1 - \cos^2 x)^2\, dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x$

357) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx = -\frac{1 + \sin^2 x}{\sin x}$

358) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^5 x}\, dx = \left[\cos^4 x - \frac{25 \cos^2 x}{8} + \frac{15}{8}\right] \frac{\cos x}{\sin^4 x} + \frac{15}{8}\, l\, \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$

359) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\, dx = \left[-\sin^3 x + \frac{3 \sin x}{2}\right] \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{2}\, l\, \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

360) $\int \frac{\sin^7 x}{\cos^4 x}\, dx = \left[-\frac{\sin^6 x}{3} - 2 \sin^4 x + 8 \sin^2 x - \frac{16}{3}\right] \frac{1}{\cos^3 x}$

361) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l \operatorname{tg} x$

362) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2 \operatorname{cotg} 2x$

363) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2 \sin^2 x} + l \operatorname{tg} x$

364) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{1}{3 \sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3} \operatorname{cotg} 2x.$

Durch theilweise Integration erhält man:

365) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \sin^n x \cos^{-n} x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$

366) $\int \operatorname{cotg}^n x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x\, dx$

367) $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - l \cos x$

368) $\int \operatorname{tg}^8 x\, dx = \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$

369) $\int \operatorname{cotg}^6 x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} - \operatorname{cotg} x - x$

370) $\int \operatorname{cotg}^7 x\, dx = -\frac{\operatorname{cotg}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{cotg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} - l \sin x$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx.$$

Wird je eines der beiden Integrale eliminirt, so erhält man:

371) $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$

372) $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx].$

Setzt man in beiden Formeln $-x$ statt x, so gehen daraus die folgenden hervor:

373) $\int e^{-ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx + b \cos bx]$

374) $\int e^{-ax} \cos bx\, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}[a \cos bx - b \sin bx]$

375) $\int e^{ax} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int e^{ax} \sin(m+n)x\, dx +$

$+\frac{1}{2}\int e^{ax} \sin(m-n)x\, dx$

376) $\int e^{ax} \sin^4 bx\, dx = \frac{1}{8}\int e^{ax}(\cos 4bx - 4\cos 2bx + 3)\, dx$

377) $\int e^{ax} \cos^3 bx\, dx = \frac{1}{4}\int e^{ax}(\cos 3bx + 3\cos bx)\, dx$

378) $\int x^n \sin x\, dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1} \cos x\, dx$

379) $\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx$

380) $\int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{\sin x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx$

381) $\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{\cos x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1}\int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx.$

Wird $\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ gesetzt, so ist $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ und

382) $\int \frac{dx}{a+\cos x} = \frac{2}{a-1}\int \frac{dx}{y^2 + \frac{a+1}{a-1}}$

" $= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{arc\,tg} y \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$, wenn $\frac{a+1}{a-1} > 0$,

" $= \frac{-1}{\sqrt{1-a^2}}\, l\, \frac{y - \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}{y + \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}}$, wenn $\frac{a+1}{a-1} < 0$.

Für $a = 1$ ist

383) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

Ebenso findet man für $\sin x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$, dass $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ und

384) $\int\frac{dx}{a+\sin x}=\frac{2}{a+1}\int\frac{dx}{y^2+\frac{a-1}{a+1}}$

„ $=\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arc\,tg} y\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$, wenn $\frac{a-1}{a+1}>0$,

„ $=\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\, l\, \frac{y-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{y+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}$, wenn $\frac{a-1}{a+1}<0$.

Für $a=1$ wird

385) $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=-\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

386) $\int\frac{\cos x}{a+\cos x}dx=\int\left(1-\frac{a}{a+\cos x}\right)dx=x-a\int\frac{dx}{a+\cos x}$

387) $\int\frac{\sin x}{a+\sin x}dx=x-a\int\frac{dx}{a+\sin x}$

388) $\int\frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x}=S$

$$S=m\int\frac{dx}{ma+mb\sin x+mc\cos x}=m\int\frac{dx}{ma+\sin\lambda\sin x+\cos\lambda\cos x},$$

wenn $mb=\sin\lambda$, $mc=\cos\lambda$, oder $m=\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}$ gesetzt wird. Weiter ist $\lambda=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{c}$ und

$$S=m\int\frac{dx}{am+\cos(x-\lambda)}$$

Hiermit ist das gegebene Integral auf (382) zurückgeführt.

389) $\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\, l\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$; $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\lambda=\frac{\pi}{4}$.

Ist $ma-1=0$, oder $a=\sqrt{b^2+c^2}$, so ist:

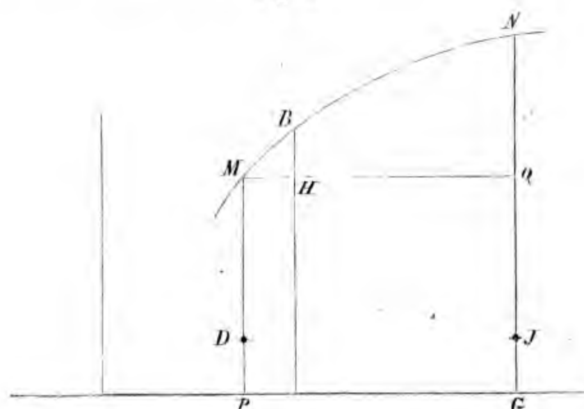
390) $\int\frac{dx}{a+b\sin x+c\cos x}=\frac{1}{a}\cdot\frac{c\sin x-b\cos x}{a+b\sin x+c\cos x}$.

Zu dem unbestimmten Integral

$$y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

kann man, wie zu jeder anderen Funktion, die Funktionskurve construiren. Nehmen wir zuerst an, das unbestimmte Integral sei ausführbar, $F(x)$ also bekannt. Wählt man in Fig. 9 $AP = a$ und macht $MD = F(a)$, $DP = C =$ der Constanten, also beliebig gross, so erhält man Punkt M. Ebenso wird Punkt N gefunden, wenn $AG = b$, $NJ = F(b)$, $JG = DP =$ Constanten gemacht wird. In gleicher Weise werden die Constructionselemente aller übrigen Punkte bestimmt. Aus dieser Construction wird zunächst klar, dass die Wahl der beliebigen Constanten auf den Lauf der Funktionscurve nicht influirt, indem eine Aenderung der Werthe $C = DP = JG$ nichts weiter zur Folge hat, als eine parallele Verschiebung der x-Achse. Unter der Voraussetzung, dass $F(x)$ zwischen den Grenzen $F(a)$ bis $F(b)$ eindeutig, stetig und endlich bleibt, lassen wir die Variable x die Werthe von $x = a$ bis $x = b$ continuirlich durchlaufen und

Fig. 9.



erhalten so den Bogen MN. Die Aenderung, welche y während

dieses Laufes erleidet, wird hier durch NQ bezeichnet, und es ist:

$$NQ = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).$$

An dem noch nicht ausgeführten Integral bezeichnen wir diesen Funktionsunterschied so:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

und nennen einen solchen Ausdruck ein bestimmtes Integral, a die obere, b die untere Grenze desselben.

Ist also der Werth des unbestimmten Integrals bekannt, so lässt sich das bestimmte Integral unmittelbar anschreiben.

Aber die Funktionskurve, von der wir ausgingen, lässt sich auch noch definiren und näherungsweise construiren, wenn es nicht mehr möglich ist, den Werth $F(x)$ des unbestimmten Integrals in geschlossener Form darzustellen. Man überzeugt sich hiervon in folgender Weise.

Der Funktionsunterschied NQ kann aufgefasst werden als die Summe der kleinen Zu- und Abnahmen, welche y erfährt, indem x von a bis b stetig wächst, und nach dieser Auffassung würde $F(b) - F(a)$ so zu berechnen sein: Man theilt $PG = b - a$ in möglichst viele und daher sehr kleine, beispielsweise gleiche Theile, d. h. man berechnet $\delta = \frac{b-a}{n}$, indem man n möglichst gross wählt. Während nun der bewegliche Punkt M nach dem möglichst nahe gelegenen Punkt B rückt und so das Curvenelement MB erzeugt, ändert sich y um den sehr kleinen Werth BH. Bei hinreichend feiner Theilung ist MB als grad und als dasjenige Element anzusehen, welches mit der Tangente in M zusammenfällt. Setzen wir Winkel $BMH = \alpha$, $MH = \delta$, so ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left[\frac{d\,F(x)}{dx}\right]_{x=a} = f(a)$$

$$BH = F(a + \delta) - F(a) = \delta \operatorname{tg} \alpha = \delta f(a).$$

Wird in dieser Weise von Punkt zu Punkt weiter gegangen bis zu N, so erhält man:

$$F(a+\delta) - F(a) = \delta f(a)$$
$$F(a+2\delta) - F(a+\delta) = \delta f(a+\delta)$$
$$F(a+3\delta) - F(a+2\delta) = \delta f(a+2\delta)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(b) - F[a+(n-1)\delta] = \delta f[a+(n-1)\delta]$$

und daraus durch Addition:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \delta\,[f(a) + f(a+\delta) + \ldots + f(a+(n-1)\delta)]$$

Der Sinn dieser Formel ist folgender: Der Werth des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

lässt sich (genau oder doch näherungsweise) bestimmen, indem man in der Funktion $f(x)$ die Variable von a bis b in möglichst kleinen Intervallen δ zunehmen lässt, die Werthe: $f(a)$, $f(a+\delta)$, $f(a+2\delta), \ldots$ bildet, und dann jeden dieser Werthe mit dem constanten, aber möglichst kleinen Zuwachs δ multiplicirt und die so gewonnenen Producte addirt. Ist das Integral:

$$\int f(x)\,dx$$

unbestimmt ausführbar, so kann man diese Summe einfacher so bilden, dass man zu $f(x)$ das unbestimmte Integral $F(x)$ sucht und $F(b) - F(a)$ bildet.

Da in jedem Fall:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ ist,}$$

so hat man:

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b); \text{ woraus folgt:}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Ist m ein Werth zwischen a und b, so ist:

$$\int_a^m f(x)\,dx = F(m) - F(a)$$
$$\int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(m)$$

$$\int_a^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

391) $\int_a^b m\,x^n\,dx = \frac{m}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$

392) $\int_{-2}^{+2} x^4\,dx = \frac{64}{5}$

393) $\int_a^b (a + b\,x)\,dx = \frac{2\,a\,b + b^3 - 2\,a^2 - a^2\,b}{2}$

394) $\int_0^3 (2\,x + 3\,x^2)\,dx = 36$

395) $\int_{-\frac{1}{2}}^0 (1 + \frac{3\,x}{2} - x^2)\,dx = \frac{13}{48}$

396) $\int_0^{3a} \frac{x^2 - 3\,a\,x}{x - 4\,a}\,dx = a^2\left(\frac{15}{2} - 8\,l\,2\right)$

397) $\int_3^5 \frac{x}{x^4 - 4}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,\frac{21}{5}$

398) $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{4a}$

399) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}\,dx = \frac{\pi}{2}$

400) $\int_2^7 \frac{x}{x^2 + 2\,x - 3}\,dx = \frac{1}{4}\,l\,6 + \frac{3}{4}\,l\,2$

401) $\int_0^a dx\,\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$

402) $\int_2^7 dx\,\sqrt{x + 2} = \frac{38}{3}$

403) $\int_0^a dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a^2\,\pi}{4}$

404) $\int_0^a 3\,x\,\sqrt{x^2 + 4\,a^2}\,dx = a^3\,(5\,\sqrt{5} - 8)$

405) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$

406) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = 1$

407) $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2+4x}} dx = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

408) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} dx = \frac{3a^2\pi}{8}$

409) $\int_0^{2b} dx\sqrt{2bx-x^2} = \frac{b^2\pi}{2}$

410) $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

411) $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2.4.6\ldots\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$

412) $\int_0^1 e^x dx = e-1$

413) $\int_0^1 x e^x dx = 1$

414) $\int_0^2 e^{ax} dx = \frac{e^{2a}-1}{a}$

415) $\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$

416) $\int_{-1}^{+1} a^x dx = \frac{a^2-1}{a\,l\,a}$

417) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = l\,2$

418) $\int_1^e x^2\,l\,x\,dx = \frac{1+2e^3}{9}$

419) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$

420) $\int_0^\pi 2a\sin\frac{x}{2}\,dx = 4a$

421) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)\,dx = 0{,}6848\ \ldots$

422) $\int_0^\pi \sin mx\,dx = \frac{1-\cos m\pi}{m}$

423) $\int_0^\pi \cos mx\,dx = \frac{\sin m\pi}{m}$

424) $\int_0^{\pi} \sin 2ax\,dx = 0$

425) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x\,dx = \frac{\pi}{4}$

426) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1.3\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots\ldots\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

427) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2.4\ldots\ldots\ldots 2n}{3.5\ldots.(2n+1)}$

428) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \cos^6 x)\,dx = \frac{\pi}{32}$

429) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{1}{2}}$

430) $\int_0^1 (1 - \sqrt[3]{x^2})^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{3\pi}{32}$

Man setzt $x = \sin^3 \varphi$, und $\varphi = 0$ für $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $x = 1$ als Grenze.

431) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x\,dx = \frac{3e^{\pi} - 1}{8}$

432) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{4}{3}$

433) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2} l\,2$

434) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1$

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie.

§. 1. Tangente und Normale ebener Curven.

Wird an die Curve $y = f(x)$ durch den Punkt (x, y) eine Tangente gelegt, so ist deren Richtungscoëfficient $= \frac{dy}{dx}$, und ihre Gleichung:

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \qquad (1)$$

wenn Y, X die Variablen und x, y die Coordinaten des Berührungspunktes bedeuten. Erscheint die Curvengleichung in der impliciten Form: $f(xy) = 0$, so muss für $\frac{dy}{dx}$ der Werth $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ substituirt werden; man erhält dann als Gleichung der Tangente:

$$(Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Diese Form der Gleichung der Tangente kann sehr leicht aus der homogenen Form der Curvengleichung abgeleitet werden. Bezeichnen wir durch $f_n(xyz) = 0$ eine homogene Funktion vom n^{ten} Grad, so ist nach Euler:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(xyz) = 0. \qquad (3)$$

Wird in (2) für $-\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ der Werth $z\frac{\partial f}{\partial z}$ substituirt, so entsteht:

$$\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}z=0. \qquad (4)$$

Um (2) aus der gegebenen Curvengleichung zu gewinnen, macht man dieselbe homogen, bestimmt die *D.-Q.* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ und setzt dieselben in (4) ein. Wird dann $z=1$ gesetzt, so geht (4) über in (2).

Beispiel: $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ist die gewöhnliche, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0$ die homogene Form der Ellipsengleichung, $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2x}{a^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}=-2z$. Homogene Form der Tangentengleichung: $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-z^2=0$. $z=1$ gibt $\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0$ als gewöhnliche Form der Gleichung der Tangente.

Wird der Lauf einer Curve durch die beiden Gleichungen bestimmt: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, so ist $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, und die Gleichung der Tangente:

$$(Y-y)\frac{dx}{dt}-(X-x)\frac{dy}{dt}=0. \qquad (5)$$

Ist endlich $r=f(t)$ die Gleichung einer Curve auf Polarcoordinaten bezogen, so ist: $x=r\cos t$; $y=r\sin t$:
$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos t-r\sin t$; $\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin t+r\cos t$.

Die Normale. Unter Normale verstehen wir die gerade Linie, welche senkrecht zu einer Tangente durch deren Berührungspunkt gelegt ist. Ihr Richtungscoefficient ist daher $=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$. Den verschiedenen Formen der Curvengleichung entsprechen die nachfolgenden Formen der Normalengleichung:

$y = f(x)$ $\qquad\qquad (Y - y)\dfrac{dy}{dx} + (X - x) = 0 \qquad (6)$

$f(xy) = 0$ $\qquad\qquad (Y - y)\dfrac{\partial f}{\partial x} - (X - x)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (7)$

$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$ $\qquad\qquad (Y - y)\dfrac{dy}{dt} + (X - x)\dfrac{dx}{dt} = 0. \qquad (8)$

Für die nachfolgenden Curven soll die Gleichung der Tangente aufgestellt werden:

1) Hyperbel: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; Tg: $\dfrac{x\,X}{a^2} - \dfrac{y\,Y}{b^2} - 1 = 0$.

2) Parabel: $y^2 - 2px = 0$; Tg: $y\,Y - p\,(X + x = 0$.

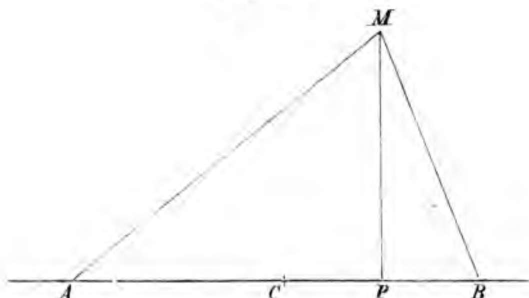
3) Neil'sche Parabel: $x^3 - p\,y^2 = 0$; Tg: $3x^2 X - 2py\,Y - - p\,y^2 = 0$.

4) Cissoide: $y^2(2r - x) - x^3 = 0$; Tg: $2y(x - 2r)\,Y + + (3x^2 + y^2)\,X - 2ry^2 = 0$.

5) Descartes'sches Blatt: $x^3 - 3axy + y^3 = 0$; Tg.: $(x^2 - ay)\,X + (y^2 - ax)\,Y - axy = 0$.

6) Die Lemniskate erhält man in folgender Weise: Zwei Punkte A und B sind durch ihre Entfernung $AB = 2e$

Fig. 10.



gegeben; man soll den geometrischen Ort aller Punkte M finden, so gelegen, dass das Produkt der beiden Leitstrahlen MA und MB constant ist. Für $MA = r$, $MB = r_1$ muss $r \times r_1 = a^2$ sein. $CA = CB = e$; $CP = x$, $MP = y$; $[y^2 + (e + x)^2]\,[y^2 + (e - x)^2] = a^4$; $(y^2 + x^2)^2 =$

$= 2e^2(x^2 - y^2) + a^4 - e^4$. Dem besonderen Fall $a = e$ entspricht die Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Durch die Substitution: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ erhält man als Polargleichung: $r = a\sqrt{2\cos 2t} = b\sqrt{\cos 2t}$.

Wird in einem Kreis senkrecht zu einem Durchmesser eine Sehne $= 2a$ gezogen, so zerlegt dieselbe den Durchmesser in 2 Theile, deren Produkt $= a^2$ ist, und die deshalb als Leitstrahlen zur Construction eines Curvenpunktes benutzt werden können.

Als Gleichung der Tangente findet man:
$(x^2 + y^2 - a^2)\,x\,X + (x^2 + y^2 + a^2)\,y\,Y + a^2(y^2 - x^2) = 0$.

7) Logarithmische Linie: $y = a^x$; Tangente: $Y - y = a^x\, l\, a\,(X - x)$.

8) Kettenlinie: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$: Tangente: $Y - y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)(X - x)$.

Da $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \frac{\sqrt{y^2 - m^2}}{m}$ ist, so findet man den Richtungswinkel α einer Tangente, indem man aus der Ordinate des Berührungspunktes als Hypotenuse und m als Kathete ein rechtwinkeliges Dreieck construirt.

9) Die Cycloide. Wenn ein Kreis (Fig. 11) eine gerade Linie AB in Punkt A berührt und dann auf der Geraden hinrollt, so beschreibt der anfängliche Berührungspunkt A eine Cycloide. Jeder vollständigen Umdrehung entspricht ein Curvenzweig. Es sei $AP = x$, $MP = y$, $MC = a$. Ist arc t mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben, so ist arc $MB = a\,t$. Da $AB = \text{arc}\,MB$ sein muss, so ist $x = AP = AB - MD = a(t - \sin t)$; $y = MP = CB - CD = a(1 - \cos t)$. Beide Gleichungen bestimmen zu-

sammen den Lauf der Cycloide. Wird t eliminirt, so erhält man: $x = a \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$.

Fig. 11.

Gleichung der Tangente: $Y - y = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} (X - x)$

„ „ „ $Y - y = - \operatorname{tg} \frac{t}{2} (X - x)$.

Um zu beweisen, dass die Normale in M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, zeigen wir, dass $X = at$, $Y = 0$, als Coordinaten von B, in Verbindung mit $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, als Coordinaten von M, der Gleichung der Normale genügen.

10) Die Epicycloide. Rollt der Kreis, dessen Mittelpunkt C ist (Fig. 12), auf dem festen Kreise mit dem Mittelpunkt

Fig. 12.

A hin, so beschreibt Punkt M während einer Umwälzung den ersten Zweig einer Epicycloide.

Es sei: $AB = r$, $CB = a$, $AP = x$, $MP = y$, t und t_1 zwei Kreisbögen mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben. Weiter ist: arc $BE = r\,t$, ars $BM = a\,t_1$, arc $BE =$ arc BM, oder $r\,t = a\,t_1$, d. h. $t_1 = \frac{r\,t}{a}$; $x = AH + DM$; $AH = (a+r)\cos t$; $DM = a \sin\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -a\cos(t+t_1) = -a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$; $y = CH - CD$; $CH = (a+r)\sin t$; $CD = a\cos\left(t + t_1 - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin(t+t_1) = a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t$. So erhält man als Gleichung der Epicycloide:

$$x = (a+r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$$

$$y = (a+r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t.$$

Gleich. d. Tangente: $Y - y = \operatorname{tg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t\,[X-x]$

„ „ Normale: $Y - y = -\operatorname{cotg}\left(\frac{r+2a}{2a}\right)t\,[X-x]$.

Soll wieder bewiesen werden, dass die Normale von M durch den Berührungspunkt B des Erzeugungskreises geht, so muss man zeigen, dass $X = r\cos t$, $Y = r\sin t$, als Coordinaten von B, in Verbindung mit den Werthen für x und y die Gleichung der Normale befriedigen.

11) Die Cardioide ist ein besonderer Fall der Epicycloide und entspricht der Bedingung $a = r$. Ihre Gleichung ist daher: $x = 2\,a\cos t - a\cos 2\,t = a\,(2\cos t + 1 - 2\cos^2 t)$; $y = 2\,a\sin t - a\sin 2\,t = 2\,a\sin t\,(1 - \cos t)$. Wird das System in der Weise transformirt, dass man $a - x$ statt x

setzt, so erhält man: $x = 2a\cos t(\cos t - 1)$; $\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} t$;

$\cos t = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $x^2 + y^2 = 4a^2(1-\cos t)^2$; $(x^2+y^2)^2 - 4ax(x^2+y^2) - 4a^2y^2 = 0$. Setzt man: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, so gewinnt man wieder die Polargleichung: $r = 2a(1+\cos t) = 4a\cos^2\frac{t}{2}$.

12) Die Gleichung der Hypocycloide entsteht aus der Gleichung der Epicycloide, indem man für den Halbmesser des beweglichen Kreises das Vorzeichen wechselt, also $-a$ statt $+a$ setzt.

13) Die archimedische Spirale: $r = at$, oder $x = at\cos t$, $y = at\sin t$; Tg.: $(Y-y)(\cos t - t\sin t) - (X-x)(\sin t + t\cos t) = 0$.

14) Die logarithmische Spirale: $r = a^t$:

Tg.: $\frac{Y-y}{X-x} = \frac{la\sin t + \cos t}{la\cos t - \sin t} = k$.

Der Richtungscoefficient des Leitstrahls ist $k_1 = \operatorname{tg} t$. Man kann beweisen, dass $\operatorname{tg} v = \frac{k-k_1}{1+kk_1} = \frac{1}{la}$, d. h. dass der Winkel v, welchen die Tangente mit dem Leitstrahl bildet, bei dieser Curve constant ist.

§. 2. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte (Spitzen), conjugirte (isolirte) Punkte.

Wenn in Formel (2) durch die Coordinaten des Berührungspunktes $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ wird, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, und damit wird für diesen Punkt (den wir als im Endlichen gelegen annehmen) die Richtung der Tangente unbestimmt. Als wahren Werth dieses unbestimmten Ausdrucks finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}}{\dfrac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx}} = -\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \dfrac{dy}{dx}},$$

und daraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial^2 f}{\partial x d y} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}. \tag{6}$$

Vorausgesetzt, dass dieser Ausdruck nicht nochmals unbestimmt wird, gibt er uns für $\frac{dy}{dx}$ im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, und daraus folgern wir, dass die Curve in diesem Punkt zwei verschiedene Tangenten besitzt, was nur dadurch möglich wird, dass sich 2 Curvenäste in diesem Punkt durchschneiden. Ein solcher Punkt wird Doppelpunkt genannt. Damit aber die beiden Werthe reell und verschieden ausfallen, muss $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sein. Ist dagegen $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so fallen die beiden Tangenten in Eine zusammen, die Curvenschleife verschwindet alsdann, und der Doppelpunkt wird zu einem Rückkehrpunkt oder zu einer Spitze. Wird endlich $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, so wird $\frac{dy}{dx}$ imaginär. Der Punkt gehört dann der Curve an, lässt aber keine Tangente zu, weil er mit den übrigen Theilen der Curve nicht in Verbindung steht. Wir nennen ihn einen isolirten oder conjugirten Punkt. Doppelpunkte, Rückkehrpunkte und isolirte Punkte haben hiernach die gemeinsame Eigenschaft, dass ihre Coordinaten den Gleichungen:

$$f(x\,y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

genügen müssen. Aber man hat:

$$\text{Einen Doppelpunkt, wenn } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (8)$$

„ Rückkehrpunkt, „ „ $=$ „ (9)

„ isolirten Punkt, „ „ $<$ „ (10)

Wird aus (6) der Werth für $\frac{dy}{dx}$ in (1) substituirt, so entsteht die für die Variablen X und Y quadratische Gleichung:

$$(Y-y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2(Y-y)(X-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (X-x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad (11)$$

deren geometrischer Ort die beiden Tangenten des Doppelpunktes sind. Für den Rückkehrpunkt muss die linke Seite dieser Gleichung ein vollständiges Quadrat bilden.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so wird für den Doppelpunkt die Gleichung der Tangente (5) nicht unbestimmt, und das Kriterium des Doppelpunktes wird ein ganz anderes, als bisher. Der Doppelpunkt hat dann die Eigenthümlichkeit, dass 2 ganz verschiedene Werthe von t gleiche Werthe für x und y erzeugen müssen. Wir drücken diese Bedingung so aus:

$$x = \varphi(t) = \varphi(t_1); \qquad y = \psi(t) = \psi(t_1). \qquad (12)$$

Die Lösungen beider Gleichungen sind die Parameter der Doppelpunkte. Wird ein zusammengehöriges Werthpaar t und t_1 nach einander in (5) substituirt, so erhält man die beiden Tangenten eines Doppelpunktes.

Rücken die Werthe t und t_1, welche einem Doppelpunkt entsprechen, einander immer näher, so wird die Curvenschleife immer kleiner und verschwindet zuletzt ganz, wenn t mit t_1 zusammenfällt. Der Punkt wird dadurch ein Rückkehrpunkt; für ihn muss nicht nur $\varphi(t) = \varphi(t_1)$, $\psi(t) = \psi(t_1)$ sein, sondern auch t_1 mit t zusammenfallen. Hiernach müssen die Parameter der Rückkehrpunkte den beiden Bedingungsgleichungen genügen:

$$\lim \frac{\varphi(t) - \varphi(t_1)}{t - t_1} = 0, \qquad \lim \frac{\psi(t) - \psi(t_1)}{t - t_1} = 0, \text{ oder}$$

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = 0. \qquad (13)$$

Der Richtungscoefficient $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$ erscheint jetzt in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ und hat den wahren Werth: $\frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2x}{dt^2}$. Die Gleichung der Tangente eines Rückkehrpunktes ist dann:

$$(Y - y)\frac{d^2x}{dt^2} - (X - x)\frac{d^2y}{dt^2} = 0. \qquad (14)$$

15) Die Lemniskate: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ hat in $x = 0$, $y = 0$ einen D.-P., dessen beide Tangenten: $Y = \pm X$ unter Winkeln von 45^0 und 135^0 die x-Achse durchschneiden, also zu einander senkrecht sind.

16) Cissoide: $y^2(2r - x) - x^3 = 0$; Spitze: $x = 0$, $y = 0$; Tg.: $Y = 0$.

17) Neil'sche Parabel: $x^3 - py^2 = 0$: Spitze: $x = 0$; $y = 0$; Tg.: $Y = 0$.

18) $f = x^4 + a^2x^2 - a^2y^2 = 0$; D.-P.: $x = 0$, $y = 0$; Tg.: $Y = \pm X$.

19) $f = x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0$; Spitze: $x = 1$, $y = 1$; Tg.: $(Y + X - 2)^2 = 0$.

20) $f = y^2 - x^3 - x^2 = 0$; D.-P.: $x = y = 0$; Tg.: $Y = \\ = \pm 2X$.

21) $f = x^4 + y^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0$; D.-P.: $x = \pm b$, $y = 0$; Tg.: $Y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{2}(X + b)$; $Y = \pm\frac{b\sqrt{2}}{a}(X - b)$.

22) $f = x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$; D.-P.: $x_1 = a$, $y_1 = 0$; $x_2 = -a$, $y_2 = 0$; $x_3 = 0$, $y_3 = -a$; Tg.: $Y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X - a)$; $Y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}(X + a)$; $Y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}X - a$.

23) $f = (y - b)^2 - (x - a)^5 = 0$; Spitze: $x = a$, $y = b$; Tg.: $Y = b$.

24) $f = 5y^2 + 10y - x^3 + 2x^2 + 5 = 0$. Der Punkt $x = 0$, $y = -1$ ist ein conjugirter Punkt.

25) $f=(y-x)^2-x^3=0$; $x=0$, $y=0$ eine Spitze. Tg.: $Y=X$.

26) $f=a y^2-x^3+b x^2=0$; $x=0$, $y=0$ ein conjugirter Punkt.

27) $f=y^2-(2-x)^2(1-x)=0$; $x=2$, $y=0$ ein conjugirter Punkt.

28) Fusspunktlinie der Ellipse: $a x^2+b y^2-(x^2+y^2)^2=0$; $x=0$, $y=0$ ein conjugirter Punkt.

29) $y=a x+b\sqrt{\sin x-1}$ stellt ein System isolirter Punkte dar: $x_1=\frac{\pi}{2}$, $y_1=\frac{a\pi}{2}$; $x_2=\pi$, $y_2=a\pi$ u. s. w., die alle auf der Geraden $y=a x$ liegen.

30) Die Cycloide: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; $\varphi'(t)=a(1-\cos t)=0$, $\psi'(t)=a\sin t=0$. Da beiden Gleichungen die Lösungen $t=0$, 2π, 4π u. s. w. genügen, so sind $x_1=2a\pi$, $y_1=0$; $x_2=4a\pi$, $y_2=0$ u. s. w. Rückkehrpunkte. Die Tangenten sind senkrecht zur Achse.

31) Die Evolute der Ellipse:

$$x=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\quad y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t$$

hat 4 Spitzen, welchen die Parameter: 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ entsprechen.

§. 3. Krümmungskreis und Evolute.

Wählt man auf einer Curve 3 einander nahe gelegene Punkte 1, 2, 3, zieht die Sehnen 1 — 2 und 2 — 3, und errichtet in der Mitte beider je eine Senkrechte, so ist der Schnittpunkt dieser Senkrechten der Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch die 3 Punkte geht. Indem diese mehr und mehr einander näher rücken, werden die Sehnen immer kürzer und in der Grenze zu Curvenelementen, welche zugleich auch dem Kreis angehören. Die beiden Senkrechten werden dabei zu zwei unendlich nahe gelegenen Normalen, und der Kreis selbst wird zum Krümmungs-

kreis. Die Stärke der Krümmung einer Curve in einem bestimmten Punkt wird gemessen durch die Grösse der Krümmung des dem betreffenden Punkt zugehörigen Krümmungskreises, und da diese mit wachsendem Halbmesser $= \varrho$ abnimmt, so ist der reciproke Werth dieses Halbmessers, nämlich $\frac{1}{\varrho}$, ein Ausdruck, für das Mass der Krümmung. Wir beginnen mit der Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes für die Gleichungsform: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, legen durch zwei vorerst noch endlich entfernte Punkte $x\,y$ und $x_1\,y_1$ zwei Normalen und bestimmen deren Schnittpunkt. Die Gleichungen dieser Normalen sind:

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0. \qquad (15)$$

$$(X - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (Y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1} = 0. \qquad (16)$$

Die Coordinaten X und Y des Schnittpunktes werden gefunden, indem man wegen (15)

$$\frac{X - x}{\frac{dy}{dt}} = -\frac{Y - y}{\frac{dx}{dt}} = m, \text{ oder}$$

$$X = x + m\frac{dy}{dt}, \qquad Y = y - m\frac{dx}{dt}. \qquad (17)$$

setzt, diese Werthe in (16) substituirt und so zunächst eine Gleichung für m herstellt:

$$\left(x + m\frac{dy}{dt} - x_1\right)\frac{dx_1}{dt_1} + \left(y - m\frac{dx}{dt} - y_1\right)\frac{dy_1}{dt_1} = 0$$

$$m = \frac{(x - x_1)\frac{dx_1}{dt_1} + (y - y_1)\frac{dy_1}{dt_1}}{\frac{dx}{dt}\frac{dy_1}{dt_1} - \frac{dy}{dt}\frac{dx_1}{dt_1}}. \qquad (18)$$

Wird dieses m in (17) substituirt, so gewinnen wir den Schnittpunkt zweier endlich entfernten Normalen. Da aber dieser Schnittpunkt unter der Voraussetzung gefunden werden soll, dass die Normalen unendlich wenig von einander entfernt

sind, so ist in (18) ein Grenzübergang auszuführen und dieser Ausdruck zunächst entsprechend umzuformen.

$$m = \frac{\left[\frac{x - x_1}{t - t_1}\right]\frac{d x_1}{d t_1} + \left[\frac{y - y_1}{t - t_1}\right]\frac{d y_1}{d t_1}}{\left[\frac{\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dy}{dt} - \left[\frac{\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt_1}}{t - t_1}\right]\frac{dx}{dt}}. \tag{19}$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so wird:

$$m = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}}. \tag{20}$$

Nun werden die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes gefunden, wenn man dieses m in (17) substituirt.

$$\begin{aligned} X &= x + \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} \\ Y &= y - \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}} \end{aligned} \tag{21}$$

Die Entfernung der beiden Punkte XY und xy, oder der Krümmungshalbmesser, wird nach folgenden Formeln berechnet:

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2} = m\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^3}}{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Geht in dieser Entwicklung t über in x, so wird $y = \psi(x)$ oder $= f(x)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dt} = 1$, und daher:

$$m = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{-\frac{d^2 y}{dx^2}}. \tag{23}$$

$$X = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \frac{dy}{dx}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}, \quad Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}. \tag{24}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}. \tag{25}$$

Ist die Gleichung in Polarcoordinaten gegeben und von der Form: $r = f(t)$, so ist $x = r \cos t$, $y = r \sin t$. Die Formeln (21) und (22) gehen dann in folgende über:

$$Y = y + \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\cos t - r \sin t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{dt^2}}. \tag{26}$$

$$X = x - \frac{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\right]\left[\frac{dr}{dt}\sin t + r \cos t\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{dt^2}}. \tag{27}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r^2\right]^3}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{dt^2}}. \tag{28}$$

Wenn endlich die implicite Funktion $f(xy) = 0$ die Curvengleichung repräsentirt, so werden nach (7) zwei zunächst wieder endlich von einander entfernte Normalen der Punkte $x\,y$ und $x_1\,y_1$ durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0. \tag{29}$$

$$(X - x_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (Y - y_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0. \tag{30}$$

Zur Bestimmung der Schnittpunktscoordinaten X Y setzt man aus (29):

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = m,$$

substituirt dann:

$$X = x + m\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = y + m\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{31}$$

in (30) und erhält:

$$\left(x - x_1 + m\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(y - y_1 + m\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

$$m = \frac{(x_1 - x)\frac{\partial f}{\partial y_1} - (y_1 - y)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

$$m = \frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] - \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right]\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{32}$$

Rücken beide Normalen unendlich nahe zusammen, so wird ihr Schnittpunkt zum Krümmungsmittelpunkt. Hierbei sind in dem Werth von m folgende Grenzübergänge auszuführen: $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ wird $= \frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}$; $\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx}$;

$$\lim \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx};$$

$$\lim \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x}}{x_1 - x}\right] = \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{dx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

Werden diese Werthe in (32) substituirt und $-\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$ für $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, so erhält man denjenigen Werth von m, welcher, in (31) substituirt, uns X und Y als Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes giebt. Man erhält:

$$m = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}. \quad (33)$$

$$\varrho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-x)^2} = m\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^3}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}. \quad (34)$$

Jedem Punkt der gegebenen Curve entspricht ein bestimmter Krümmungsmittelpunkt. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte wird Evolute genannt. Die beiden Gleichungen für X und Y bestimmen zusammen mit der Gleichung der gegebenen Curve die Gleichung dieser Evolute.

Die Elemente des Krümmungskreises für die folgenden Curven zu bestimmen:

32) Der Kreis: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$; $m = -\frac{1}{2}$, $X = 0$, $Y = 0$, $\varrho = r$. Der K.-K. fällt ganz mit dem gegebenen Kreis zusammen.

33) Die Ellipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
$m = -\frac{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t}{ab}$; $X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$, $Y = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t$.
Wird aus beiden Gleichungen die Variabele t eliminirt, so erhält man als Gleichung der Evolute: $\sqrt[3]{b^2 Y^2} + \sqrt[3]{a^2 X^2} = \sqrt[3]{(a^2 - b^2)^2}$. Auch ist $X = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3$, $Y = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$.

34) Die Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$
$m = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)\frac{a^2 b^2}{2}$

$$X = \frac{a^2 + b^2}{a^4} x^3, \quad Y = - \frac{a^2 + b^2}{b^4} y^3$$

$$\varrho = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

35) Die Parabel: $y^2 - 2px = 0$; $m = -\frac{y^2 + p^2}{2p^2}$; $X = 3x + p$, $Y = -\frac{y^3}{p^2}$; $x = \frac{X - p}{3}$, $y^2 = \sqrt[3]{p^4 Y^2}$ in die Parabelgleichung substituirt, gibt als Evolute: $Y^2 = \frac{8}{27p}(X - p)^3$. Wird X statt $X - p$ gesetzt, oder der Anfangspunkt des Systems um p verschoben, so erhält man als Evolute die Neil'sche Parabel: $Y^2 = \frac{8}{27p} X^3$. Weiter ist $\varrho = \frac{1}{p^2} \sqrt{(p^2 + y^2)^3}$.

36) Die Cissoide: $x^3 - y^2(2r - x) = 0$

$$X = \frac{-rx(12r - 5x)}{3(2r - x)^2}, \quad Y = \frac{8r\sqrt{x}}{3\sqrt{(2r - x)}}; \quad \varrho = \frac{r\sqrt{x(8r - 3x)^3}}{3(2r - x)^2}.$$

37) Die Kettenlinie: $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$

$$X = x - \frac{m}{4}\left(e^{\frac{2x}{m}} - e^{-\frac{2x}{m}}\right), \quad Y = y + \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right) = 2y;$$

$$\varrho = \frac{m}{4}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)^2 = \frac{y^2}{m}.$$

Das Normalestück zwischen der Curve und der Abscissenachse wird bei jeder Curve nach der Formel berechnet: $N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Da man hiernach bei der Kettenlinie $N = \frac{y^2}{m}$ findet, so ist der Krümmungshalbmesser der Normale gleich.

38) Die Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $m = 2$; $X = a(t + \sin t)$, $Y = -a(1 - \cos t) = -y$. Beide Gleichungen repräsentiren zusammen die Evolute der Cycloide. Setzt man $t_1 + \pi$ statt t, so wird: $X - a\pi = a(t_1 - \sin t_1)$.

$Y + 2a = a(1 - \cos t_1)$; wird jetzt $X - a\pi$ durch X_1, $Y + 2a$ durch Y_1 ersetzt, was einer Verschiebung des Anfangspunktes um $a\pi$ und $-2a$ entspricht, so erhält man als Gleichung der Evolute:

$$X_1 = a(t_1 - \sin t_1), \quad Y_1 = a(1 - \cos t_1),$$

und daraus folgt, dass die Evolute eine congruente Cycloide ist, die sich nur hinsichtlich der Lage dadurch von der gegebenen unterscheidet, dass ihr Anfangspunkt um $a\pi$ und $-2a$ verschoben ist. Wir finden $\varrho = 4a \sin\frac{t}{2}$, und da die Normale $= 2a\sin\frac{t}{2}$ gefunden wird, so ist der Krümmungshalbmesser der doppelten Normale gleich. Um den Krümmungsmittelpunkt zu construiren, hat man die Normale nur um sich selbst zu verlängern.

39) Die Epicycloide: $x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t$,

$$y = (a + r)\sin t - a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t; \quad m = -\frac{2a}{r + 2a}$$

$$X = \frac{r}{r + 2a}\left[(a + r)\cos t + a\cos\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right]$$

$$Y = \frac{r}{r + 2a}\left[(a + r)\sin t + a\sin\left(\frac{a+r}{a}\right)t\right]$$

$$\varrho = \frac{4a(r + a)}{r + 2a}\sin\frac{r}{2a}t.$$

Der Kr.-Mittelpunkt wird auf folgende Weise construirt: Man zieht (Fig. 12) den Durchmesser MG, verbindet G mit A und verlängert die Normale MB; der Schnittpunkt K ist der gesuchte Kr.-Mittelpunkt und KM der Kr.-Halbmesser. Da GN parallel BM sein muss, so ist $KB = \frac{r}{r + 2a}GN = \frac{r}{r+2a}BM$, und

$$KM = \left(1 + \frac{r}{r + 2a}\right)BM = \frac{2(a + r)}{2a + r}BM =$$

$$= \frac{2(a + r)}{2a + r}2a\sin\frac{t_1}{2} = \frac{4(a + r)}{2a + r}\sin\frac{rt}{2a} = \varrho.$$

40) Die Lemniskate: $r = a\sqrt{\cos 2t}$.

$$X = \frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}},\quad Y = -\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}};\quad \varrho = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2t}} = \frac{a^2}{3r}.$$

Da $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, so ist $x^2 + y^2 = a^2\cos 2t$, oder $\cos 2t = \frac{x^2+y^2}{a^2}$, $\varrho = \frac{a^2}{3\sqrt{x^2+y^2}}$. Drückt man $\sin^2 t$ und $\cos^2 t$ durch die Coordinaten des Kr.-Mittelpunktes aus, so gewinnt man mit Hilfe der beiden Relationen: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ und $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ die Gleichung der Evolute: $3\,(X^{2/3} + Y^{2/3})\sqrt{X^{2/3} - Y^{2/3}} = 2a$.

41) Die logarithmische Spirale: $r = a^t$.

$$X = -\,l\,a\,a^t\sin t,\quad Y = l\,a\,a^t\cos t;\quad \varrho = a^t\sqrt{1+(l\,a)^2}.$$

Um die Polargleichung der Evolute zu erhalten, setze man den Leitstrahl $R = \sqrt{X^2+Y^2} = l\,a\,a^t$. Wird $l\,a = a^\varepsilon$ gesetzt, so ist $R = a^{t+\varepsilon}$, d. h. die Evolute dieser Spirale ist eine gleiche Spirale, welche nur um den Bogen ε gedreht ist.

§. 4. Die Wende- oder Inflexionspunkte.

Liegen 3 unendlich nahe Punkte einer Curve in einer geraden Linie, so wird der Krümmungshalbmesser an dieser Stelle unendlich gross. Weil in solchen Punkten die Curve die Art ihrer Krümmung ändert, so werden sie Inflexions- oder Wendepunkte genannt. Verbinden wir die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Krümmungshalbmessers mit der Funktionsgleichung der Curve, so erhalten wir als Lösungen beider Gleichungen die Coordinaten aller Wendepunkte.

Ist $f(xy) = 0$ die gegebene Gleichung, so wird nach (34) ϱ unendlich, wenn:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

In der Form einer Determinante heisst diese Bedingungsgleichung:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (35)$$

Wird die dritte Vertikalreihe mit $(n-1)$ multiplicirt, die ganze Determinante durch $(n-1)$ dividirt und 0 durch nf ersetzt, so erhält man:

$$\varDelta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf \end{vmatrix} = 0. \qquad (36)$$

Multiplicirt man nun die erste Vertikalreihe mit x, die zweite mit y und zieht ihre Summe von der dritten ab, so wird:

$$\varDelta = \frac{1}{n-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & nf - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \qquad (37)$$

Wird jetzt die gegebene Funktion $f(xy) = 0$ in die homogene Funktion $f(xyz) = 0$ umgewandelt, so kann der Lehrsatz von Euler: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$, wenn n den Grad der Funktion anzeigt, zur Anwendung kommen. Da aber $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ wieder homogene Funktionen sein müssen, und zwar vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad, so ist nach demselben Satz:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \\
x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (38) \\
x\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Mittelst dieser Relationen bringt man (37) auf die Form:

$$\Delta = \frac{1}{n-1}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & z\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0. \qquad (39)$$

Wird in dieser Determinante wieder $z = 1$ gesetzt, so bildet sie die Bedingungsgleichung für das Unendlichwerden des Kr.-Halbmessers. Sie geht leicht in folgende über:

$$\Delta = \frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,d x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ (n-1)\frac{\partial f}{\partial x} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial y} & (n-1)\frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplicirt man die erste Horizontalreihe mit x, die zweite mit y und zieht die Summe von der dritten ab, substituirt dann für die Elemente der dritten Reihe die Werthe aus (38) und setzt dabei $z = 1$, unterdrückt ferner den constanten Factor, so erhält man:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} = 0. \qquad (40)$$

Die Schnittpunkte der beiden Curven $f = 0$ und $\Delta = 0$ lehren uns die Wendepunkte der Curve kennen. Ist $f = 0$ vom n^{ten} Grad, so muss die Inflexions-Determinante vom $3\,(n-2)^{\text{ten}}$

Grad sein. Beide Gleichungen lassen daher im Allgemeinen $3n(n-2)$ Lösungen zu, und die Curve hat eben so viele Wendepunkte. Curven des zweiten Grades können demnach keine Wendepunkte besitzen.

Ist die Curve durch die beiden Gleichungen gegeben: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so wird der Krümmungshalbmesser nach (22) unendlich, wenn:

$$\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \tag{41}$$

und aus dieser Gleichung entnehmen wir die Parameter der Wendepunkte.

Für die Form: $y = f(x)$ wird nach (23) der Krümmungshalbmesser unendlich, wenn:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{42}$$

Die reellen im Endlichen gelegenen Wendepunkte folgender Curven zu finden:

42) $f = x^3 + y^3 + 6axy + 1 = 0$. Homogene Form: $x^3 + y^3 + 6axyz + z^3 = 0$.

$$\varDelta = 6^3 \begin{vmatrix} x & az & ay \\ az & y & ax \\ ay & ax & z \end{vmatrix}$$

$$\varDelta = xyz(1 + 2a^3) - a^2(x^3 + y^3 + z^3) = 0; \quad z = 1$$

gibt: $x^3 + y^3 + 1 - \frac{1 + 2a^3}{a^2} xy = 0$. Aus dieser Gleichung und $f = 0$ finden wir: $x = 0$, $y = -1$; $x = -1$, $y = 0$ als Coordinaten der Wendepunkte.

43) $f = x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0$. Homogene Form: $x^3 - 3ax^2z + c^2yz^2 = 0$.

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 6(x - az) & 0 & -6ax \\ 0 & 0 & 2c^2z \\ -6ax & 2c^2z & 2c^2y \end{vmatrix}$$

$\varDelta = 24(x - a)c^4 = 0$. Aus $\varDelta = 0$ und $f = 0$ findet man $x = a$, $y = \frac{2a^3}{c^2}$ als Coordinaten eines Wendepunktes.

44) $f = x^2 y - x + y = 0$, oder $x^2 y - x z^2 + y z^2 = 0$.
$\Delta = x^3 - x^2 y - 2x - y = 0$. Wendepunkte: $x = 0$,
$y = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$, $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

45) $f = (a - x)^5 - y = 0$; $\Delta = (a - x)^3 = 0$; Wendepunkt: $x = a$, $y = 0$.

46) $f = x^4 - a^2 x^2 + a^3 y = 0$; Wendepunkt: $x = \pm\frac{a}{\sqrt{6}}$, $y = \frac{5a}{36}$.

47) $f = y - x^3 = 0$; Wendepunkt: $x = 0$, $y = 0$.

48) Die Wendepunkte eines Kegelschnitts sollen aus der allgemeinen Gleichung:

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x + F = 0$$

gefunden werden.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2C & B & E \\ B & 2A & F \\ E & D & 2F \end{vmatrix}.$$

Da die Relation: $\Delta = 0$ durch keinen besonderen Werth von x und y erfüllt werden kann, so haben Kegelschnitte im Allgemeinen keine Wendepunkte. Ist aber diese Verbindung von Constanten $= 0$, so ist jeder Punkt des Kegelschnitts ein Wendepunkt, und der Kegelschnitt besteht dann aus einem System von geraden Linien.

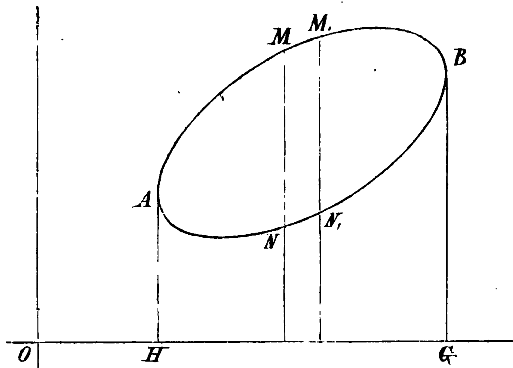
49) Die Wendepunkte der Curve $y = \sin x$ zu finden.
$x = \pi$, 2π, 3π u. s. w., $y = 0$.

§. 5. Der Flächeninhalt begrenzter Figuren.

Um das von der Curve $AMBNA$ eingeschlossene Flächenstück (Fig. 13) zu finden, theilen wir dasselbe durch möglichst nahe gelegene Ordinaten in lauter elementare Streifen, wie MNN_1M_1, die unter dieser Voraussetzung als schmale Rechtecke angesehen werden können.

Ist $MP = Y_i$, $NP = y_i$, $M_1P_1 = Y_{i+1}$, $N_1P_1 = y_{i+1}$, $OP = x_i$, $OP_1 = x_{i+1}$, $OH = \alpha$, $OG = a$, so ist die Fläche

Fig. 13.



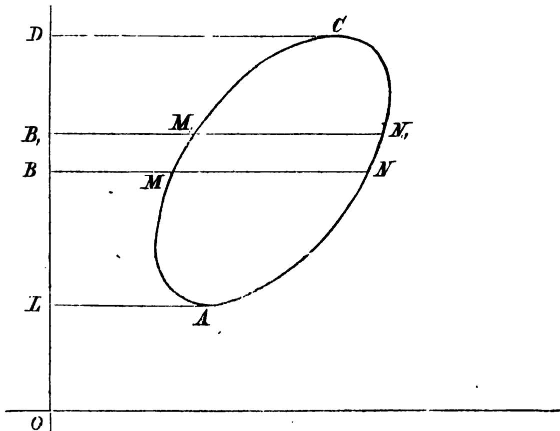
eines solchen Rechtecks MNN_1M_1 $(Y_i - y_i)(x_{i+1} - x_i)$, und die Summe aller Rechtecke, oder die ganze Fläche:

$$\text{Fl. } AMBNA = \Sigma (Y_i - y_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_\alpha^a (Y - y)\, dx. \quad (43)$$

Wenn statt der Curve ANB die Achse HG als untere Grenze eintritt, so ist $y = 0$ zu setzen. Mann hat dann:

$$\text{Fl. } HAMBGH = \int_\alpha^a Y\, dx. \quad (44)$$

Fig. 14.



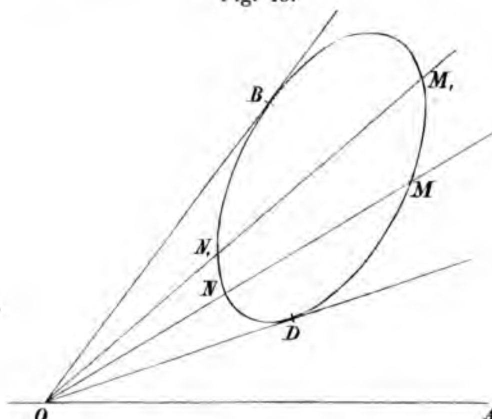
Wird die Fläche durch Linien, welche parallel zur x-Achse liegen, in elementare Streifen, wie MNN_1M_1 zerlegt und $MB = x_i$, $NB = X_i$, $OB = y_i$, $OB_1 = y_{i+1}$, $OL = \beta$, $OD = b$ gesetzt, so ist $MM_1N_1N = (X_i - x_i)(y_{i+1} - y_i)$, und

$$\text{Fl. } AMCNA = \Sigma (X_i - x_i)(y_{i+1} - y_i) = \int_\beta^b (X - x)\,dy. \quad (45)$$

Wieder wird $\text{Fl. } ALDCNA = \int_\beta^b X\,dy.$ (46)

Ist endlich die Curve in Polarcoordinaten gegeben, so zerlege man dieselbe in elementare Streifen von der Form MM_1N_1N

Fig. 15.



und setze $OM = R$, $ON = r$, $OM_1 = R_1$, $ON_1 = r_1$, Wkl. $MOA = t$, Wkl. $M_1OA = t_1$, Wkl. $DOA = \gamma$, Wkl. $BOA = C$. Da unter dieser Voraussetzung die Bögen MM_1 und NN_1 als gerade Linien anzusehen sind, so ist:

$$\text{Fl. } NMM_1N_1 = \frac{(RR_1 - rr_1)\sin(t_1 - t)}{2}.$$

$$\text{Fl. } BNDMB = \frac{\Sigma (RR_1 - rr_1)\sin(t_1 - t)}{2} = \int_\gamma^C \frac{R^2 - r^2}{2}\,dt, \quad (47)$$

weil in der Grenze $R_1 = R$, $r_1 = r$ und $\sin(t_1 - t) = \text{arc}(t_1 - t) = dt$ wird. Soll wieder die Fläche $OBMDO$ berechnet werden, so ist $r = 0$ zu setzen, wodurch entsteht:

$$\text{Fl. } OBMDO = \int_\gamma^c \frac{R^2}{2} dt. \tag{46}$$

50) Man soll das Fächenstück berechnen, welches zwischen einem Parabelbogen und der x-Achse liegt; $y^2 = 2px$.

$$\text{Fl.} = \int_0^x y\,dx = \int_0^x \sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{3} xy.$$

Der Parabelbogen, vom Anfangspunkt gerechnet, theilt das aus Abscisse und Ordinate des Endpunktes construirte Reckteck so, dass zwei Drittheile desselben die Parabelfläche bilden.

51) Die Fläche eines Kreises zu finden; $x = r\cos t$, $y = r\sin t$.

$dx = -r\sin t\,dt$; für $x = 0$ ist $t = \frac{\pi}{2}$, für $x = r$ ist $t = 0$.

$$\text{Fl.} = 4\int_0^r y\,dx = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r^2 \sin^2 t\,dt = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = r^2\pi.$$

52) Die Fläche einer Ellipse zu finden; $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

$$\text{Fl.} = 4\int_0^a y\,dx = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab\sin^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = ab\pi.$$

53) Man soll das Flächenstück berechnen, welches zwischen einem Hyperbelbogen und einer zur x-Achse senkrechten Sehne liegt; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\text{Fl.} = 2\int_a^x y\,dx = 2b\int_a^x dx \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Zum Zweck der Transformation setzen wir $x = a\frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = b\frac{e^t - e^{-t}}{2}$, durch welche Werthe die Curvengleichung befriedigt wird. Da $x = a$ wird für $t = 0$, und $dx = a\frac{e^t - e^{-t}}{2} dt$ ist, so ist:

$$\text{Fl.} = \frac{ab}{2}\int_0^t (e^t - e^{-t})^2 dt = \frac{ab}{2}\left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} - 2t\right) = xy - abt.$$

Ferner ist $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = e^t$, oder $t = l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$.

$$\text{Fl.} = xy - ab\,l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

54) Man zeichne eine Hyperbel nebst ihren beiden Asymptoten. Curvengleichung: $xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = m^2$. Es sei A der Anfangspunkt des Systems, S der Scheitel, SB die Ordinate, $AB = p$ die Abscisse des Scheitels; MD die Ordinate, $AD = x$ die Abscisse des beliebigen Punktes M, α der Asymptotenwinkel. Die Fläche $SBDM$ soll berechnet werden.

Weil das System schiefwinkelig ist, so ist das Differential der Fläche $= \sin\alpha\, y\, dx$, und:

$$\text{Fl.} = \sin\alpha \int_p^x \frac{m^2}{x}\, dx = m^2 \sin\alpha\,(l\,x - l\,p).$$

55) Die Fläche zwischen einer Cycloide und ihrer x-Achse zu finden; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$\text{Fl.} = \int_0^{2a\pi} y\, dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2\, dt = 3a^2\pi.$$

56) Eine Curve hat die Gleichung: $x = a(1 - \cos t)$, $y = at$; man soll die Fläche zwischen der Curve und der x-Achse finden für $t = 0$ bis $t = 2\pi$.

$$\text{Fl.} = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t\, dt = 2a^2\pi.$$

57) Die Fläche zu berechnen, welche von einer Epicycloide und den beiden nach ihren Endpunkten gezogenen Halbmessern des Grundkreises eingeschlossen wird;

$$x = (a + r)\cos t - a\cos\left(\frac{a + r}{a}\right)t,\quad y = (a + r)\sin t -$$
$$- a\sin\left(\frac{a + r}{a}\right)t.$$

Denken wir uns (Fig. 12) die angefangene Curve EM vollendet und an den Endpunkt P gesetzt, so soll die Fläche $AEMPA$ berechnet werden. Man ziehe Leitstrahl $AM = R$ und setze Wkl. $MAE = \varphi$, so ist:

$$\text{Fl. } AEMA = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} R^2\, d\varphi.$$

Da aber $R^2 = x^2 + y^2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$, $\cos^2\varphi = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, wenn xy die Coordinaten von M sind, so ist:

$$d\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{dt} = \frac{d\frac{y}{x}}{dt}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{R^2} = \frac{(a+r)(2a+r)\left[1-\cos\frac{r}{a}t\right]}{R^2}.$$

$$\text{Fl.} = \frac{1}{2}\int_0^t R^2\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^t\left(1-\cos\frac{r}{a}t\right)dt.$$

Für die Fläche $AEMPA$ hat der Erzeugungskreis eine ganze Umdrehung vollendet, so dass $rt = 2a\pi$, oder $t = \frac{2a\pi}{r}$ sein muss.

$$\text{Fl. } AEMPA = \frac{(a+r)(2a+r)}{2}\int_0^{\frac{a2\pi}{r}}(1-\cos\frac{r}{a}t) = \frac{(a+r)(2a+r)a\pi}{r}.$$

Wird davon der Kreisausschnitt $AEPA = ar\pi$ abgezogen, so bleibt die Fläche $EMPBE$ zurück.

58) Die Cardioidenfläche erhält man aus der vorhergehenden Formel, indem man $r = a$ setzt. Fl. $= 6a^2\pi$.

59) Die Fläche der Lemniskate: $R^2 = a^2\cos 2t$ zu finden.

$$\text{Fl.} = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t = a^2.$$

60) Die Fläche der archimedischen Spirale: $R = at$ soll für einen Umlauf des Leitstrahls gefunden werden.

$$\text{Fl.} = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{4a^2\pi^3}{3}.$$

§. 6. Rectification ebener Curven.

Sind M und M_1 zwei beliebige Curvenpunkte, xy und $x_1\,y_1$ deren Coordinaten, so ist die Sehne:

$$M M_1 = s = \sqrt{(y-y_1)^2 + (x-x_1)^2} = (x-x_1)\sqrt{1+\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)^2}.$$

Beim Grenzübergang erhält man als Differential des Bogens:

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Sind α und a die Abscissen der beiden Punkte A und B, so ist:

$$S = \text{arc}\,A B = \int_\alpha^a dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (47)$$

Soll arc AB aus den Ordinaten der Endpunkte berechnet werden, so setze man:

$$s = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = (y-y_1)\sqrt{1+\left(\frac{x-x_1}{y-y_1}\right)^2},$$

woraus beim Grenzübergang entsteht: $ds = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$,
und, wenn β und b die Ordinaten der Endpunkte A, B sind:

$$S = \text{arc}\,A B = \int_\beta^b dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}. \qquad (48)$$

Für die Gleichungsform: $f(xy) = 0$ wird aus (47):

$$S = \int_\alpha^a \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \qquad (49)$$

und daraus wieder, weil $\dfrac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\dfrac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}$ ist,

$$S = -\int_\beta^b \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial x}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}. \qquad (50)$$

Ist endlich die Curve durch die beiden Gleichungen: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, und ist weiter $\alpha = \varphi(\gamma)$, $a = \varphi(c)$, so geht (47) über in:

$$S = \int_\gamma^c dt \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \qquad (51)$$

61) Die Peripherie eines Kreises zu berechnen; $x = r\cos t$, $y = r\sin t$.

$$S = \int_0^{2\pi} dt \sqrt{(\sin^2 t + \cos^2 t) r^2} = 2 r \pi.$$

62) Die Länge eines Parabelbogens vom Scheitel bis zum Punkt xy zu finden; $y^2 = 2px$.

$$S = \int_0^y dy \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{y}{2p}\sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2}\, l\left[\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}\right].$$

63) Den Bogen einer Neil'schen Parabel zu finden, vom Anfangspunkt bis zum Punkt xy; $y^2 = a x^3$.

$$S = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{9ax}{4}} = \frac{8}{27a}\left[\left(1 + \frac{9ax}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

64) Der Bogen einer Kettenlinie vom Anfangspunkt bis zum Punkt xy soll berechnet werden; $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$.

$$S = \int_0^x dx \sqrt{1 + \left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right)^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} - e^{-\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{y^2 - m^2}.$$

Der Bogen einer Kettenlinie, genommen vom Anfangspunkt bis zum Punkt xy, ist gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete $= m$ und dessen Hypotenuse die Ordinate des Endpunktes ist.

65) Es soll die Bogenlänge der Cycloide gefunden werden; $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$S = a\int_0^{2\pi} dt \sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8a.$$

66) Die Bogenlänge einer Epicycloide zu berechnen.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4(a + r)^2 \sin^2 \frac{r}{2a} t.$$

$$S = 2(a + r)\int_0^{\frac{2a\pi}{r}} \sin\frac{r}{2a} t\, dt = \frac{8a(a + r)}{r}.$$

Setzt man $a = r$, so erhält man $16\,a$ als Länge der Cardioide.

67) Die Länge des Bogens der archimedischen Spirale zu finden; $r = a\,t$.

$$S = a\int_0^t \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{a}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + l(t+\sqrt{1+t^2})\right].$$

68) Den Umfang einer Ellipse zu berechnen; $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Ein Quadrant ist gleich:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}$$

$$= a\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t},\ \text{wenn}\ \frac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2\ \text{ist.}$$

$$S = a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4\cos^4 t - \frac{1}{16}\varepsilon^6\cos^6 t - \ldots\right]dt$$

$$S = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2\,.\,4}\right)^2 3\,\varepsilon^4 - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 5\,\varepsilon^6 - \ldots\right].$$

§. 7. Die Oberfläche von Rotationskörpern.

Wird eine Curve um ihre x-Achse gedreht, so erzeugt sie eine krumme Oberfläche. Ist die Ordinate eines sich drehenden Curvenelements $= y$, so ist das Differential der Oberfläche gleich der Oberfläche eines kleinen Cylindermantels, dessen Umfang $= 2\,y\,\pi$, und dessen Seite $= ds$, d. h. gleich dem Differential des Bogens ist. Hiernach ist das Differential der Oberfläche $d\,O = 2\,y\,\pi\,ds$, und:

$$O = 2\,\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad (52)$$

69) Die Oberfläche einer Kugelhaube zu finden, wenn

$$y = \sqrt{2\,r\,x - x^2}$$

die Scheitelgleichung des Erzeugungskreises und h die Höhe der Haube ist.

$$O = 2\pi \int_0^h dx \sqrt{2rx - x^2} \sqrt{1 + \frac{(r-x)^2}{2rx - x^2}} = 2r\pi h.$$

70) Die Mantelfläche eines Kegels zu berechnen.

Ist $y = kx$ die Gleichung der Geraden, die durch Umdrehung den Kegelmantel erzeugt, und h die Höhe des Kegels, so ist:

$$O = 2k\pi \sqrt{1 + k^2} \int_0^h x\,dx = k\pi h^2 \sqrt{1 + k^2}.$$

Da $k = \operatorname{tg} \alpha$, wenn α der Richtungswinkel der erzeugenden Geraden, so ist $kh = r =$ Basishalbmesser, und $h\sqrt{1 + k^2} = s =$ Länge der Erzeugungslinie. Durch Substitution dieser Werthe erhält man: $O = r\pi s$.

71) Es soll die Oberfläche des Körpers gefunden werden, der entsteht, wenn sich eine Cycloide um ihre x-Achse dreht. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

$$O = 2a^2\pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= 8a^2\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{64a^2\pi}{3}.$$

72) Die Oberfläche eines Paraboloides zu berechnen. Parabelgleichung: $y^2 = 2px$.

$$O = 2\pi \sqrt{p} \int_0^x dx \sqrt{p + 2x} = \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} \left[(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

73) Man soll die Oberfläche eines Ellipsoides berechnen, das entsteht, wenn sich eine Ellipse um eine ihrer Achsen dreht.

Ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ die Gleichung der Curve, so ist

$$\frac{1}{2} O = \frac{2b\pi}{a^2} \int_0^a dx \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}.$$

Wenn nun $a > b$ ist, so ist $a^2 - b^2 = e^2$, und

$$\frac{1}{2} O = \frac{2b\pi}{a^2} \int_0^a dx \sqrt{a^4 - e^2 x^2}$$





